

Mathe Sommersemester 2005/06

Robert Imlau (Robert-I@web.de)
Sandro Knauß (sandro.knauss@uni-bremen.de)
Moritz Krieger (kriegerm@uni-bremen.de)
Lucia Lenz (llenz@uni-bremen.de)
Joscha Schmiedt (schmiedt@uni-bremen.de)

18. Juli 2006

Das vorliegende Skript zur Vorlesung “Höhere Mathematik II” von Christof Büskens ist eine elektronische Mitschrift von hörenden Studenten und soll übersichtlich den behandelten Stoff darstellen. Das Skript ist jedoch kein Ersatz für die Vorlesung und kann nicht die Funktion einer persönlichen Mitschrift übernehmen. Für Fehlerfreiheit des Skripts und der Vorlesung können wir nicht garantieren. Anregungen und Fehlerhinweise werden dankend per e-Mail entgegengenommen.

Inhaltsverzeichnis

6	Integration	1
6.1	Das bestimmte Integral	1
6.2	Das unbestimmte Integral	3
6.3	Berechnung von Integralen	4
6.3.1	Grundintegrale	4
6.3.2	Partielle Integration	6
6.3.3	Substitutionsregel	7
6.3.4	Integration rationaler Funktionen mit Partialbruchzerlegung	9
6.4	Uneigentliche Integrale	13
6.5	Anwendungen	15
6.5.1	Flächeninhalt zwischen zwei Kurven	15
7	Vektoren und Matrizen	16
7.1	Vektorrechnung im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3	16
7.1.1	Vektoren im \mathbb{R}^2	16
7.1.3	Vektoren im \mathbb{R}^3	20
7.1.4	Geraden und Ebenen in \mathbb{R}^3	25
7.1.5	Substitutionsregel	28
7.2	Vektorrechnung im \mathbb{R}^n	29
7.2.1	Lineare Gleichungssysteme, Matrizen und Determinanten	34
7.2.2	Ergebnisse und Folgerungen	45
7.2.3	Die inverse Matrix	47
7.2.4	Wechsel des Koordinatensystems (im VR)	51
7.3	komplexe Zahlen	52
7.4	Eigenwerte und Eigenvektoren	52
7.4.1	Nützliche Hinweise für Rechenkontrolle.	56
7.5	Quadratische Formen und Quadritzen	57
7.5.1	Quadratische Formen, Symmetrische Matrizen	57
7.5.2	Quadriken	60
7.5.3	Normalformen der Quadriken im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3	61
7.5.4	Berechnungsmothode für Quadrikenormalform	63
8	Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	65
8.1	Einführendes Beispiel - lineare mechanische Schwingung	65
8.2	Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung	68
8.2.1	Lösung der homogenen DGL	69
8.3	Anfangs und Randbedingungen	74
8.3.1	Ausblick: Lineare DGL höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten	74

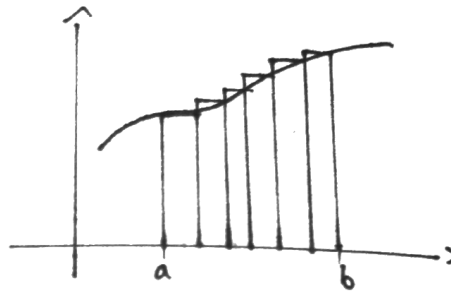
9	Differentiation von Funktionen in mehreren Variablen	76
9.1	Kurven und Bogenlängen	76
9.2	Funktionen in mehreren Variablen	85
9.3	Bsp: Graphische Veranschaulichung	87
9.4	Veranschaulichung reeller Funktionen in mehreren Variablen	90
9.5	Reellwertige Funktionen in mehreren Variablen	90
9.6	Grenzwerte und Stetigkeit	92
9.6.1	Partielle Ableitungen	94
9.6.2	Totale Ableitung, linear Approximation, Tangentialebene	98

6 Integration

6.1 Das bestimmte Integral

Aufgabe: Bestimme Fläche unter dem Graphen $f(x)$ zwischen $x=a$ und $x=b$

Vorgehen: Zerlege in Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ mit $a = x_0 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$. Wähle $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ beliebig. Eine Näherung der Fläche zwischen $y = f(x)$ und x-Achse in $[x_{i-1}, x_i]$ ist die Rechteckfläche.



$$\tilde{F}_n = \sum_{i=1}^n \Delta F_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Die Näherung ist umso besser, je feiner die Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ ist:

$$\max_i (x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$$

Numerische Methoden zur Integration sind z.B. die Festlegung von $\xi_i := x_i$, oder $\xi_i := x_{i-1}$, oder $\xi_i := \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$.

Definition 6.1.1 Riemann-integrierbar

Die Funktion $y = f(x)$ heißt im Intervall $[a, b]$ (Riemann-)integrierbar, wenn \tilde{F}_n den gleichen Grenzwert F hat für alle Zwischenunterteilungen $a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b$ und alle Festlegungen $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Man schreibt:

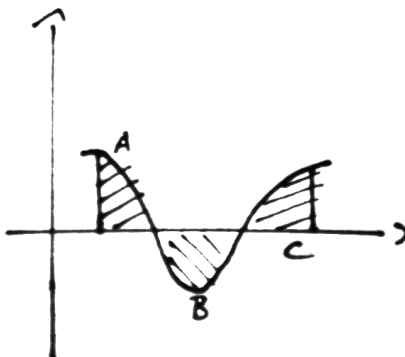
$$\tilde{F} = \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \text{ mit } \max_i (x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$$

Man nennt $\int_a^b f(x) dx$ bestimmtes Integral von $f(x)$ über $[a, b]$ ¹

¹a,b: untere bzw. obere Grenze; $f(x)$: Integrand; x: Integrationsvariable

Satz 6.1.2

Jede im Intervall $[a, b]$ stückweise stetige und beschränkte Funktion $f(x)$ ist dort auch Riemann-integrierbar (Beweis siehe Literatur).



Nach der Definition zählen A und C positiv, B negativ. Aus der Definition von \int als Grenzwert von Rechtecksummen folgt:

Satz 6.1.3

Für über $[a, b]$ integrierbare Funktionen $f(x), g(x)$ gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ für } a \leq c \leq b$$

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Definition 6.1.4

Das Vertauschen der Intervallgrenzen a, b bewirkt ein umgekehrtes Vorzeichen des Integrals

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Folgerung

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

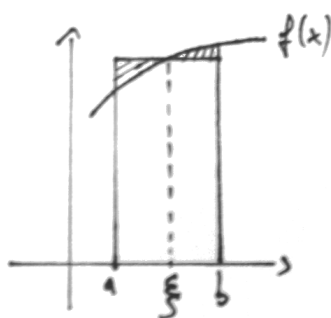
Dies ist auch anschaulich sofort klar.

Satz 6.1.5 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f \in C^0$ ², dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit der Eigenschaft, dass

$$f(\xi) \cdot (b - a) = \int_a^b f(x)dx$$

² $f \in C^0 [a, b]$ 0-mal stetig differenzierbar,



Beweis. Folgerung aus dem Zwischenwertsatz (ZWS) für stetige Funktionen □

6.2 Das unbestimmte Integral

Wir untersuchen die Umkehrung der Differentiation. Gegeben ist $f(x)$; gesucht ist $F(x)$, so dass

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x).$$

Definition 6.2.1

Ist $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ definiert und existiert in $[a, b]$ eine differenzierbare Funktion $F(x)$ existiert mit $F'(x) = f(x)$, so heißt $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$.

Satz 6.2.2

Sei $f(x) \in C^0[a, b]$. Dann ist $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Jede andere Stammfunktion $\tilde{F}(x)$ von $f(x)$ hat die Form: $\tilde{F}(x) = F(x) + c$, $c = \text{const}$.

Beweis. Für $x \in]a, b[$ und $x + h \in]a, b[$ existiert nach dem MWS der Integralrechnung ein $\xi \in [x, x + h]$, sodass gilt:

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt \\ &\stackrel{\text{MWS}}{=} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(\xi) = f(\xi) \end{aligned}$$

Dann: $h \rightarrow 0 \Rightarrow \xi \rightarrow x \xrightarrow{f \in C^0} f(\xi) \rightarrow f(x)$ (Grenzwert existiert) und es gilt:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \dots = f(x)$$

$f \in C^1 [a, b]$ 1-mal stetig differenzierbar,
 \dots
 $f \in C^n [a, b]$ n-mal stetig differenzierbar,
 $f \in C^\infty [a, b]$ ∞ -mal stetig differenzierbar

Seien $\tilde{F}(x)$ und $\hat{F}(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$.

$$\Rightarrow \tilde{F}'(x) = f(x) = \hat{F}'(x) \Rightarrow (\tilde{F} - \hat{F})'(x) = 0$$

Also ist

$$\tilde{F}(x) - \hat{F}(x) = \text{const.}$$

□

Definition 6.2.3

Eine (bis auf eine Konstante eindeutige) Stammfunktion von $f(x)$ bezeichnet man mit $\int f(x)dx$ und nennt diesen Ausdruck unbestimmtes Integral

Satz 6.2.4 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

(Berechnung des unbestimmten Integrals)

Sei $f \in C^0[a, b]$ und $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) := F(x)|_a^b$$

Beweis.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x f(t)dt + c \Rightarrow F(b) = \int_a^b f(t)dt + c \\ F(a) &= \underbrace{\int_a^a f(t)dt}_{=0} + c \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

□

6.3 Berechnung von Integralen

6.3.1 Grundintegrale

Jede Ableitungsregel liefert eine Integrationsregel

$f(x) = F'(x)$	$\int f(x)dx = F(x) + c$	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$	$x \neq 0$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan x + c$	$x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{-1}{\sin^2(x)}$	$\cot x + c$	$x \neq 2\pi k$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + c$	$ x < 1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$	
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + c$	$ x < 1$
e^x	$e^x + c$	
e^{ax}	$\frac{1}{a} e^{ax} + c$	
$\sinh(x)$	$\cosh(x) + c$	
$\cosh(x)$	$\sinh(x) + c$	
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c = \sinh^{-1}(x) + c$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln x + \sqrt{x^2-1} + c = \sinh^{-1}(x) + c$	$ x > 1$

Beachten Sie auch die ausführlichen Tabellen der Grundintegrale in Büchern und Formelsammlungen.

Bemerkung. Ein Grund dafür, dass Integration schwieriger ist als Differentiation: Nicht jede Stammfunktion einer elementaren Funktion kann durch elementare Funktionen dargestellt werden.

Beispiel

e^{x^2} und $\frac{\sin x}{x}$ besitzen keine elementar darstellbaren Stammfunktionen.

Differenzieren ist Technik (Handwerk) – Integrieren ist Kunst.

6.3.2 Partielle Integration

Ausgangspunkt: Produktregel der Differentiation.

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + \underbrace{u(x)v'(x)}_{\text{auflösen und integrieren}}$$

$$\int_a^b uv' = \int_a^b (uv)' dx - \int_a^b u'v dx$$

$$\boxed{\int_a^b uv' = uv|_a^b - \int u'v}$$

Die "Kunst" ist die richtige Aufspaltung von $f(x) = u(x)v'(x)$

27.04.06

Beispiel 1

$$\int_1^2 x \cdot e^x dx =$$

wähle: $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$
 $v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$

$$= [x \cdot e^x]_1^2 - \int_1^2 1 \cdot e^x dx = [x \cdot e^x]_1^2 - [e^x]_1^2 = e^2$$

Beispiel 2

$$\int x^2 \cos x \cdot dx =$$

wähle: $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$
 $v'(x) = \cos x \Rightarrow v(x) = \sin x$

$$= x^2 \sin x - \int 2x \sin x \cdot dx =$$

wähle: $u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = 2$
 $v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$

$$= x^2 \sin x - \left[2x(-\cos x) - \int 2(-\cos x) dx \right]$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

Beispiel 3

Manchmal hilft auch $v'(x) = 1$, wie bei

$$\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln(x) - x + c$$

6.3.3 Substitutionsregel

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $f \in C^0(I)$,

$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $g \in C^1[a, b]$ mit $g([a, b]) \subset I$,

d.h. $x \in [a, b] \xrightarrow{g} I \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, also ist $f(g(x))$ möglich!

Dann gilt:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

Beweis. Sei $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$ d.h. $F(x) = \int f(x) dx$ und $F'(x) = f(x)$.
Wegen der Kettenregel

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x),$$

ist $F(g(x))$ Stammfunktion zu $f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Das heißt $F(g(x)) = \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$.

Damit ergibt sich mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_a^b (f(g(x)) \cdot g'(x)) dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

□

Beispiel 1: Logarithmische Integration

Wir wählen $f(t) = \frac{1}{t}$. Damit lautet

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx &= \int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{1}{t} dt \\ &= \left[\ln(t) \right]_{g(a)}^{g(b)} \\ &= \left[\ln g(x) \right]_a^b \end{aligned}$$

Dies gilt für jede stetig differenzierbare Funktion $g(x)$ ohne Nullstellen zwischen a und b .

$$\boxed{\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + c}$$

Beispiel 2

$$\begin{aligned} \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx &= \int (\ln x)^2 \frac{1}{x} dx \\ &= \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C \\ &= \frac{1}{3} (\ln x)^3 + C \end{aligned}$$

Bei unbestimmter Integration ist am Schluss eine Rücksubstitution nötig!

Achtung: Bei Anwendung in der Form

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} f(g(x)) g'(x) dx$$

muss die Funktion $g(x)$ zusätzlich streng monoton sein! (damit die Umkehrfunktion g^{-1} existiert!)

Beispiel 3

$$\int_2^4 (2t - 3)^4 dt = ?$$

Substitution: $u = h(t) = 2t - 3$ (streng monoton)

$$\begin{aligned} u' = \frac{du}{dt} = 2 &\implies \frac{1}{2} du = dt \\ \int_{t=2}^{t=4} (2t - 3)^4 dt &= \int_{u=1}^{u=5} \frac{1}{2} u^4 du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^5}{5} \right]_{u=1}^{u=5} = \frac{1}{2} \left(5^4 - \frac{1}{5} \right) = 312,4 \end{aligned}$$

Die Umformung mit infinitesimalen Größen ist mathematisch nicht (Gans) korrekt

Beispiel 4

Oft steht der Buchstabe x statt t .

$$\int 3\sqrt{8x - 4} dx = 3 \int \frac{1}{8} \sqrt{u} du = \frac{3}{8} \frac{u^{3/2}}{1,5} = \frac{1}{4} (8x - 4)^{\frac{3}{2}}$$

Substitution: $u = 8x - 4$ (streng monoton) $du = 8dx$

Beispiel 5

$$\int_{x=1}^{x=2} \frac{x}{\sqrt{x^2+8}} dx = \int_{u=9}^{u=12} \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2x} du = \underbrace{\int_{u=9}^{u=12} \frac{1}{2\sqrt{u}} du}_{\text{wichtig: kein } x \text{ mehr}} = \left[\sqrt{u} \right]_9^{12} = \sqrt{12} - 3$$

Substitution $u = x^2 + 8$ (streng monoton auf $[1,2]$):

$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad dx = \frac{du}{2x}$$

6.3.4 Integration rationaler Funktionen mit Partialbruchzerlegung

Literatur:

- Leupold Band 1, Kap 6.2.4
- Ansorge/Oberle Band 1, Kap 13.4
- Meyberg/Vachenauer Band 1, Kap 4.3 S.179 ff

(a) Partialbruchzerlegung

Wichtig für die Integration einer echt gebrochenen rationalen Funktion. Anwendungsgebiete sind die

- Meß- und Regelungstechnik
- Kurvendiskussion: für Ablesbarkeit von Asymptoten und Polstellen, Ableitungen leichter berechenbar
- Laplace-Transformation zur Lösung von Differentialgleichungen

Rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ohne gemeinsamen Polynomfaktor³.

Ohne Einschränkung gilt bereits:

$$\text{Grad } p(x) < \text{Grad } q(x) \text{ (durch Polynomdivision)}$$

1. Schritt Produktdarstellung von $q(x)$ erzeugen:

$$q(x) = c \cdot (x - b_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - b_r)^{k_r} \cdot Q_1(x)^{l_1} \cdot \dots \cdot Q_s(x)^{l_s}$$

mit paarweise verschiedenen Nullstellen bei der Vielfachheit k_i und mit verschiedenen quadratischen Polynomen $Q_j(x)$ ohne reelle Nullstellen der Vielfachheit l_j .

28.04.06

³ $p(x), q(x)$ sind Polynome

2. Schritt Partialbruchansatz:

Zu jedem Linearfaktor $(x - b)$ der Vielfachheit k benötigt man Partialbrüche

$$\frac{A_1}{(x - b)}, \frac{A_2}{(x - b)^2}, \dots, \frac{A_k}{(x - b)^k}$$

und zu jedem quadratischen Faktor $Q(x)$ der Vielfachheit l benötigt man Partialbrüche

$$\frac{B_1x + C_1}{Q(x)}, \frac{B_2x + C_2}{[Q(x)]^2}, \dots, \frac{B_lx + C_l}{[Q(x)]^l}$$

3. Schritt Koeffizientenberechnung (Einsetzmethode, Koeffizientenvergleich)**Beispiel 1**

Für $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)^3(x - 2)}$ lautet die Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{A_3}{(x - 1)^3} + \frac{\tilde{A}}{x - 2}$$

Multiplikation mit dem Nennerpolynom liefert:

$$x^2 + x + 1 = A_1(x - 1)^2(x - 2) + A_2(x - 1)(x - 2) + A_3(x - 2) + \tilde{A}(x - 1)^3$$

Einsetzmethode (Empfehlung: Nullstellen ausnutzen)

Die speziellen Werte $x = 1, x = 2, x = 3, x = 0$ ergeben

$$\begin{aligned} A_3 &= -3 \\ \tilde{A} &= 7 \\ 4A_1 + 2A_2 + A_3 + 8\tilde{A} &= 13 \\ -2A_1 + 2A_2 - 2A_3 - \tilde{A} &= 1 \end{aligned}$$

Lösen des LGS liefert: $A_1 = -7, A_2 = -6, A_3 = -3, \tilde{A} = 7$

Ergebnis

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)^3(x - 2)} = \frac{-7}{(x - 1)} + \frac{-6}{(x - 1)^2} + \frac{-3}{(x - 1)^3} + \frac{7}{x - 2}$$

anderer Weg: Koeffizientenvergleich Anordnung der Gleichung nach x-Potenzen

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= (A_1 + \tilde{A})x^3 + (-4A_1 + A_2 - 3\tilde{A})x^2 \\ &+ (5A_1 - 3A_2 + A_3 + 3\tilde{A})x + (-2A_1 + 2A_2 - 2A_3 - \tilde{A}) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} A_1 + \tilde{A} &= 0 \\ -4A_1 + A_2 - 3\tilde{A} &= 1 \\ 5A_1 - 3A_2 + A_3 + 3\tilde{A} &= 1 \\ -2A_1 + 2A_2 - 2A_3 - \tilde{A} &= 1 \end{aligned}$$

Das LGS hat dieselbe Lösung wie das obige.

Beispiel 2

Im Nenner quadratischer Polynomfaktor ohne reelle Nullstellen $x^2 + 1$

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+1)^3}$$

$$f(x) = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2} + \frac{B_3x+C_3}{(x^2+1)^3}$$

Multiplikation mit Nennerpolynom ergibt

$$\begin{aligned} x+1 &= A_1(x-1)(x^2+1)^3 + A_2(x^2+1)^3 + (B_1x+C_1)(x-1)^2(x^2+1)^2 \\ &\quad + (B_2x+C_2)(x-1)^2(x^2+1) + (B_3x+C_3)(x-1)^2 \end{aligned}$$

Entweder durch Einsetzen spezieller Werte (z.B. $x = 1, 2, 0, \dots$) oder durch Koeffizientenvergleich erhält man: A_j, B_j, C_j .

Lösung:

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+1)^3} = \frac{1}{8} \left(\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{5}{(x-1)} + \frac{5x+3}{x^2+1} + \frac{6x+2}{(x^2+1)^2} + \frac{4x-4}{(x^2+1)^3} \right)$$

(b) Integration

Die letztendliche Integration erfolgt in mehreren Schritten.

1. Schritt Polynomdivision bei Bedarf liefert

$$\frac{P(x)}{q(x)} = R(x) = g(x) + \frac{p(x)}{q(x)}$$

die Polynome $P(x), p(x), q(x), g(x)$, wobei $p(x)$ und $q(x)$ ohne gemeinsamen Polynomfaktor sind und $\text{Grad } p(x) < \text{Grad } q(x)$ ist.

2. Schritt Partialbruchzerlegung von $\frac{p(x)}{q(x)}$

3. Schritt Integration von $g(x)$ und Integration der Partialbrüche

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^k} dx = \frac{1}{1-k} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$$

Sei $p^2 - 4q < 0$ und $k > 1$.

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan\left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}\right) + C$$

$$\int \frac{ax + b}{x^2 + px + q} dx = \frac{a}{2} \ln|x^2 + px + q| + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2 + px + q}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} = \frac{2x + p}{(k-1)(4q - p^2)(x^2 + px + q)^{k-1}} + \frac{2(2k-3)}{(k-1)(4q - p^2)} \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{k-1}}$$

$$\int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^k} dx = \frac{-a}{2(k-1)(x^2 + px + q)^{k-1}} + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k}$$

Die Rekursionsformel ist gegebenenfalls mehrfach anzuwenden bis das quadratische Polynom im Nenner nur noch einfach vorkommt.

4. Schritt Das Integral $\int R(x) dx$ als Summe der Teilintegrale darstellen.**Beispiel**

$$R(x) = \frac{3x^5 - 2x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 7x + 6}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$$

1. entfällt, da der Zählergrad $<$ Nennergrad ist und weder $x-1$ noch $x+1$ gekürzt werden können.
2. Partialbruchzerlegung:

$$R(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+1} + \frac{4}{(x^2+1)^2}$$

3. Integration Partialbrüche

$$\int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C$$

$$\int \frac{2}{(x-1)^2} dx = \frac{-2}{x-1} + C$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+1} dx = \int \frac{2x}{x^2+1} + \int \frac{1}{x^2+1} dx = \ln|x^2+1| + \arctan x + C$$

$$\int \frac{4}{(x^2+1)^2} dx = \frac{2x}{x^2+1} + 2 \int \frac{1}{x^2+1} = \frac{2}{x^2+1} + 2 \arctan x + C$$

4. Zusammenfassen

$$\int R(x)dx = \frac{-2}{x-1} + \frac{2x}{x^2+1} + \ln|x-1| + \ln|x^2+1| + 3 \arctan x + C$$

5. zur Probe die rechte Seite differenzieren ...

Zusammenfassung Wie löse ich das Integral $\int_b^a f(x)dx$?

1. Durch Suche einer Stammfunktion

- a) Tabelle der Grundintegrale
- b) Anwendung von Integrationsregeln
- c) Computer-Algebra-Systeme

2. Numerische Integration

- a) Rechteckregeln, Trapezregeln
- b) Simpsonsche Regel, Newton'sche 3/8-Regel
- c) spezielle numerische Verfahren

04.05.06

6.4 Uneigentliche Integrale

Bisher sind die Integrationsgrenzen stets endlich gewählt worden. In der Anwendung treten auch Integrale auf, wo $+\infty$ oder $-\infty$ in den Grenzen vorkommen und das Integral einen endlichen Wert hat.

Definition 6.4.1

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \quad \text{mit } f \in C^0[a, \infty[$$

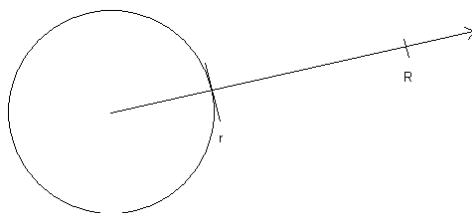
und

$$\int_{-\infty}^b g(x)dx \quad \text{mit } g \in C^0] - \infty, b]$$

heißen uneigentliche Integrale.

Beispiel Gravitationsfeld

Im Gravitationsfeld der Erde soll eine Masse m aus der Entfernung r_0 ins Unendliche ($r = \infty$) gebracht werden. Welche Arbeit W_∞ ist dazu aufzuwenden?

Abbildung 1: Bewegung einer Masse m von r_0 nach R im Gravitationsfeld der Erde

Die Arbeit W_R , um m von $r = r_0$ nach $r = R$ zu bringen, ist über das Gravitationsgesetz

$$f(r) = \gamma \frac{mM}{r^2}$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} W_R &= \int_{r_0}^R f(r) dr = \int_{r_0}^R \gamma \frac{mM}{r^2} dr = \gamma mM \int_{r_0}^R \frac{1}{r^2} dr \\ &= \gamma mM \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_0}^R = \gamma mM \left[\frac{1}{r_0} - \frac{1}{R} \right] \end{aligned}$$

Dabei ist γ die Gravitationskonstante und M die Erdmasse. Für $R \rightarrow \infty$:

$$W_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} W_R = \lim_{R \rightarrow \infty} \gamma mM \left[\frac{1}{r_0} - \frac{1}{R} \right] = \gamma mM \frac{1}{r_0}$$

Wie im Beispiel ist die Berechnung von uneigentlichen Integralen so, dass zunächst das bestimmte Integral berechnet wird und dann der Grenzwert bezüglich der Integrationsgrenze gebildet wird.

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f(x) dx &:= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \\ \int_{-\infty}^a f(x) dx &:= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

Beispiel 1

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_1^\lambda \frac{1}{x^3} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{2}$$

Beispiel 2

$$\int_1^\infty \frac{1}{r} dr = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_1^\lambda \frac{1}{r} dr = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} [\ln r]_1^\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \ln |\lambda| = \infty$$

Das heißt, dass das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{1}{r} dr$ nicht existiert!

Beispiel 3

Auch $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$ ist ein uneigentliches Integral, da $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ nur auf $0 \leq t < 1$ definiert ist und bei $t = 1$ eine Polstelle hat.

$$\int_0^T \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt = [2 - \sqrt{1-t}]_0^T = 2 - 2\sqrt{1-T} \xrightarrow{T \rightarrow 1} 2$$

6.5 Anwendungen

Literatur: Leupold, Band 1, Kap. 6.3-6.4

6.5.1 Flächeninhalt zwischen zwei Kurven**Beispiel**

Gesucht ist die Fläche zwischen \sqrt{x} und x^2 .

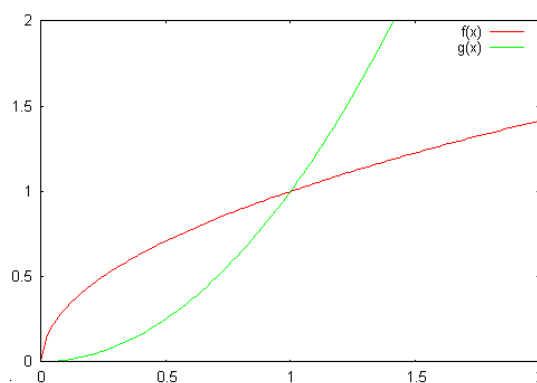


Abbildung 2: Berechnen der Fläche zwischen zwei Graphen

- Berechnung der Schnittpunkte: $\sqrt{x} = x^2 \Rightarrow x = 0$ und $x = 1$
- $A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Beispiel Kinematik

Für die Bewegung eines Massenpunktes gilt

$$v(t) = \dot{s}(t) = \frac{d}{dt} s(t) \text{ Geschwindigkeit}$$

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t) \text{ Beschleunigung}$$

Ist die Beschleunigung als Funktion der Zeit bekannt (z.B. durch ein Kraftgesetz: Kraft = Masse · Beschleunigung), so erhält man durch Integration die Geschwindigkeit $v(t)$ und durch nochmalige Integration das Weg-Zeit-Gesetz $s(t)$

$$v(t) = \int a(t) dt, s(t) = \int v(t) dt$$

Beispiel (Freier Fall ohne Luftreibung)

Beschleunigende Kraft:

$$\begin{aligned} ma &= F_G = mg \\ \Rightarrow a(t) &= g = \text{const} \\ \Rightarrow v(t) &= \int a(t)dt = gt + c_1 \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante c_1 , bestimmt sich aus der Anfangsgeschwindigkeit:

$$v(0) = v_0 \Rightarrow c_1 = v_0 \Rightarrow v(t) = gt + v_0$$

Das Weg-Zeit-Gesetz folgt aus nochmaliger Integration

$$\Rightarrow s(t) = \int v(t)dt = \int (gt + v_0)dt = \frac{g}{2}t^2 + v_0t + c_2$$

Die Integrationskonstante c_2 bestimmt sich aus der Anfangsposition:

$$s(0) = s_0 \Rightarrow c_2 = s_0 \Rightarrow s(t) = \frac{g}{2}t^2 + v_0t + s_0$$

7 Vektoren und Matrizen**7.1 Vektorrechnung im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3** **Definition 7.1.1**

Ein Vektor \vec{a} ist eine Klasse (Menge) von Pfeilen (gerichtete Strecken), die in Länge und Richtung übereinstimmen.

7.1.1 Vektoren im \mathbb{R}^2

Im \mathbb{R}^2 -Raum werden durch zwei senkrecht stehende Koordinatenachsen (kartesisches Koordinatensystem genannt) Koordinatendarstellungen der Vektoren festgelegt.

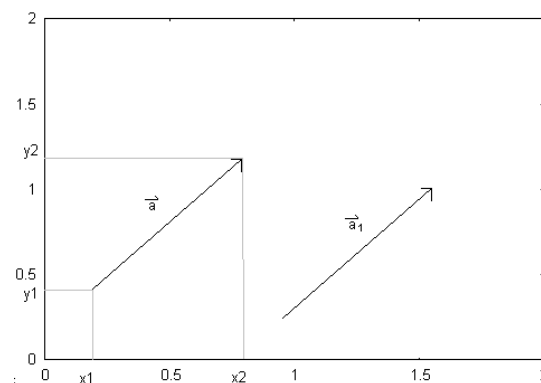


Abbildung 3: Richtungsvektoren(Vektorraum)

\vec{a} und \vec{a}_1 repräsentieren den gleichen Vektor: $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \overline{P_1P_2}$

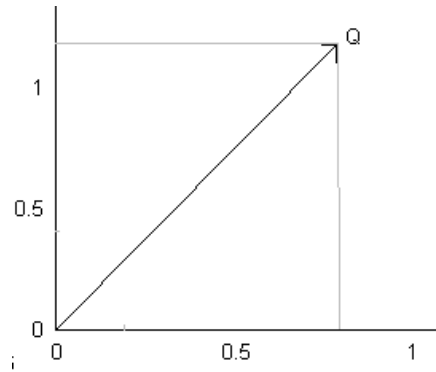


Abbildung 4: Ortsvektoren(affiner Raum)

Ortsvektoren gehen vom Ursprung aus. $\overline{OQ} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ist nicht verschiebbar.

05.05.06

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Geometrisch: Streckung des Vektors mit Faktor λ

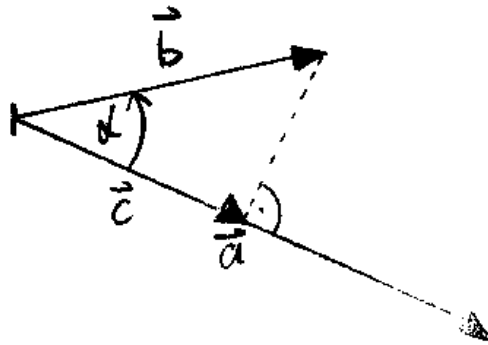


Abbildung 5: Skalarprodukt

Addition zweier Vektoren

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

Geometrisch:

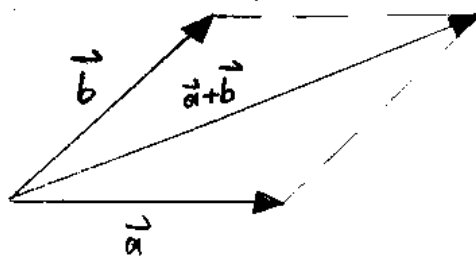


Abbildung 6: Kräfte-Parallelogramm

Länge eines Vektors (nach Pythagoras)

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

manchmal auch geschrieben als $|\vec{a}|$ oder $\|\vec{a}\|_2$

Beispiel

An einem Massenpunkt wirken die Kräfte

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die resultierende Kraft ist

$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Der Betrag der resultierenden Kraft ist

$$|\vec{F}_r| = \sqrt{(-3)^2 + 8^2} = \sqrt{73}[\text{N}]$$

Beispiel

Vektoren der Länge 1 heißen normierte Vektoren. Die Einheitsvektoren sind

$$\vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist dann $\vec{a} = a_x \cdot \vec{e}_1 + a_y \cdot \vec{e}_2$. Dabei geben \vec{e}_1 und \vec{e}_2 die Richtung der Koordinatenachsen an.

Beispiel

Der Nullvektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat die Länge 0 und keine Richtung.

Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

In Koordinaten berechnet sich das Skalarprodukt in "Matrixnotation" als

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \right\rangle = (a_x, a_y) \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y$$

Geometrisch entspricht das Skalarprodukt der Länge von \vec{c} , d.h. $|\vec{c}|$, wobei \vec{c} die Projektion von \vec{b} auf die Richtung von \vec{a} ist.

Physikalisch ist dies dann von Interesse, wenn ein Massepunkt sich nur entlang der Richtung \vec{a} bewegen kann, und zu gegebener Kraft \vec{b} die Komponente in Richtung \vec{a} gesucht wird. Die geleistete Arbeit ist dann:

$$W = |\vec{c}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha) \cdot |\vec{a}| = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$

Anwendung: Zwischenwinkel zwischen Vektoren:

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

Spezialfall:

$$\begin{aligned} \vec{a} \perp \vec{b} &\Rightarrow \alpha = \pm 90^\circ \\ &\Rightarrow \cos(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \quad \text{wenn } \vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b} \end{aligned}$$

Beispiel

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind orthogonal ($\vec{a} \perp \vec{b}$), weil $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 0$

b) Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a_y \\ a_x \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$ ist der Normaleneinheitsvektor zu \vec{a} .

Geometrische Anwendung Eine Gerade g durch zwei Punkte $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ mit $P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ lässt sich darstellen als Menge aller Punkte $q = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ für die gilt:

$$g : \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda \cdot (\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}}_{\text{Ortsvektor}} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektor}}, \lambda \in \mathbb{R}$$

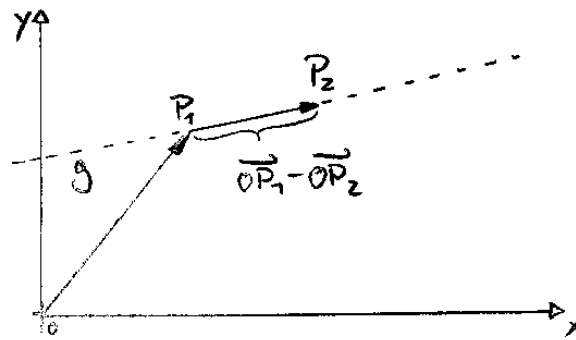


Abbildung 7: Darstellung einer Geraden

Daneben gibt es auch die Gleichungsdarstellung einer Geraden in \mathbb{R}^2 :

$$ax + by + c = 0 \quad \text{mit } (a, b) \neq (0, 0)$$

7.1.3 Vektoren im \mathbb{R}^3

Analog betrachtet man im \mathbb{R}^3 mit karthesischem Koordinatensystem Richtungsvektoren und Ortsvektoren

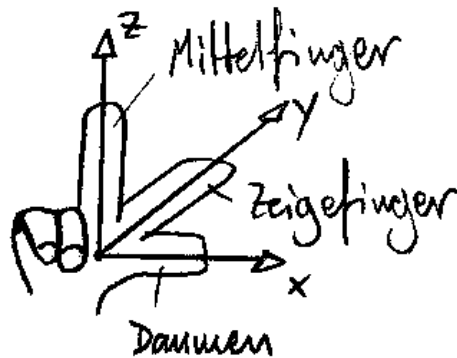


Abbildung 8: Rechte-Hand-Regel

$$\text{Richtungsvektor: } \vec{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}, \text{ Ortsvektor: } O\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln

$$\lambda \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x, a_y, a_z) + (b_x, b_y, b_z) = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

$$\text{Länge: } |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Koordinaten-Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_1 + a_y \vec{e}_2 + a_z \vec{e}_3$$

Beispiel

Der Richtungsvektor von $P_1 = (3, 4, 7)$ nach $P_2 = (7, 3, 1)$ ist:

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1 P_2} = \overrightarrow{0 P_2} - \overrightarrow{0 P_1} = (7, 3, 1) - (3, 4, 7) = (4, -1, -6)$$

Skalarprodukt im \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\sphericalangle \vec{a}, \vec{b}) \\ &= (a_x, a_y, a_z) \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned}$$

Der Winkel zwischen zwei Vektoren ist:

$$\cos(\sphericalangle \vec{a}, \vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b} \text{ stehen senkrecht aufeinander} \iff \langle \sphericalangle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0.$$

Beispiel

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bilden ein Orthonormal-System im \mathbb{R}^3 , d.h. sie stehen paarweise aufeinander senkrecht und haben die Länge 1.

$$\begin{aligned} \langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle &= 1, \quad i = 1, 2, 3 \\ \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle &= 0 \text{ für } i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

Beispiel

Auch die Vektoren $\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ bilden ein Orthonormal-System.

Projektion eines Vektors Physikalische Problemstellung: Ein Massepunkt M ist in eine Schiene eingespannt und kann nur entlang der Richtung \vec{s} bewegt werden. Auf diesen Massepunkt wirkt eine Kraft \vec{F} .

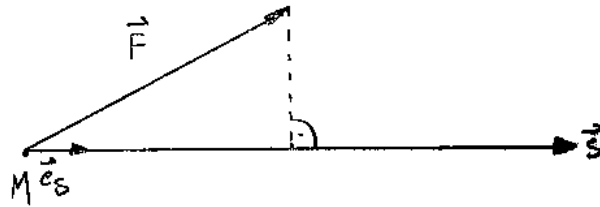


Abbildung 9: Projektion eines Vektors

Gesucht: Kraft \vec{F}_s in Richtung \vec{s} . Der Betrag von \vec{F}_s ist

$$|\vec{F}_s| = |\vec{F}| \cdot \cos \alpha = |\vec{F}| \frac{\langle \vec{F}, \vec{s} \rangle}{|\vec{F}| |\vec{s}|}$$

Die Richtung von \vec{F}_s als Einheitsvektor ist $\vec{e}_s = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$. Also gilt

$$|\vec{F}_s| \cdot \vec{e}_s = \frac{\langle \vec{F}, \vec{s} \rangle}{|\vec{s}|} \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{\langle \vec{F}, \vec{s} \rangle}{|\vec{s}|^2} \cdot \vec{s}$$

Man nennt \vec{F}_s die Projektion von \vec{F} in Richtung \vec{s} .

Kreuzprodukt zweier Vektoren

Definition 7.1.2

Unter dem Kreuzprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ versteht man den Vektor \vec{c} mit den Eigenschaften:

- $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$
- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden in der Reihenfolge ein Rechtssystem

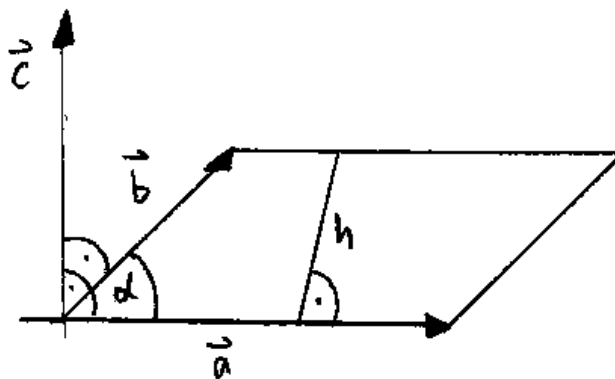
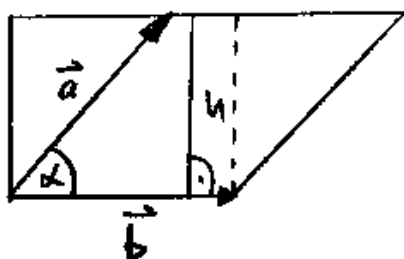


Abbildung 10: Kreuzprodukt

Achtung:⁴ Das Kreuzprodukt ist nur im \mathbb{R}^3 definiert!

Geometrische Deutung: Die Länge von \vec{c} entspricht dem Flächeninhalt des von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms.

Abbildung 11: Flächeninhalt eines Parallelogrammes : $|\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$

11.05.06

Beispiel

Falls $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ für $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$, dann ist $\vec{a} \parallel \vec{b}$ (parallel oder antiparallel).

⁴Danger!!

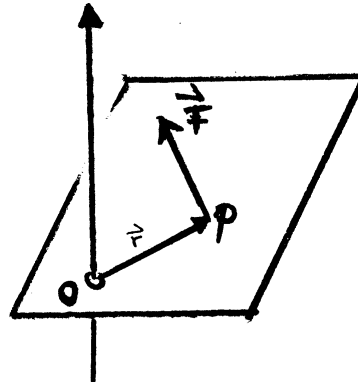


Abbildung 12: Drehmoment

Beispiel Drehmoment

Ein Körper sei um festen Punkt 0 drehbar. Im Punkte P greift eine Kraft \vec{F} an. Dann ist die Größe \vec{M} das Drehmoment von \vec{F} bzgl. $\vec{0}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Rechenregeln

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

(weitere in Büchern/ Übung). In Koordinaten ist das Kreuzprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \stackrel{\text{formal}}{=} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_x & b_x \\ \vec{e}_2 & a_y & b_y \\ \vec{e}_3 & a_z & b_z \end{vmatrix}$$

Mit dem Determinantenentwicklungssatz ergibt sich:

$$= \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -(a_x b_z - a_z b_x) \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Eine 2×2 -Determinante berechnet sich durch

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Spatprodukt

In der Mechanik kommt $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \stackrel{\text{def}}{=} \langle (\vec{a} \times \vec{b}), \vec{c} \rangle$ als "Grundfläche" mal Höhe vor. Geometrische Interpretation: Volumen(Inhalt) des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spates (Parallelotops)

Ein Quader ist ein spezieller Spat mit der Zusatzeigenschaft, dass 3 Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ paarweise orthogonal sind.

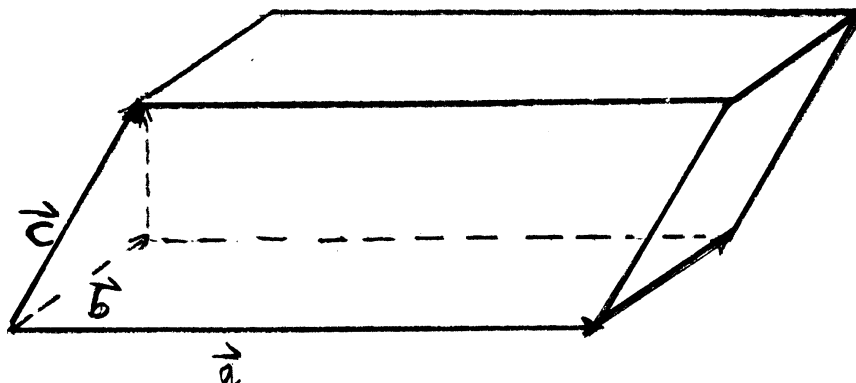


Abbildung 13: Spatprodukt

Berechnung in Koordinaten

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

7.1.4 Geraden und Ebenen in \mathbb{R}^3

Parameterdarstellung einer Geraden im \mathbb{R}^3

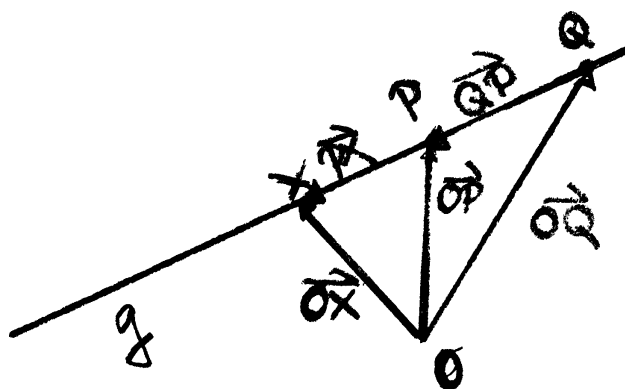


Abbildung 14: Parameterdarstellung einer Geraden

X sein ein beliebiger Punkt auf der Geraden g. P und Q seien feste, bekannte Punkte auf g

$$\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{PX} \text{ mit } \vec{PX} \parallel \vec{QP} \Rightarrow \vec{PX} = \lambda \cdot \vec{QP}, \lambda \in \mathbb{R}$$

außerdem gilt: $\vec{QP} = -\vec{OQ} + \vec{OP}$

$$\vec{OX} = \vec{OP} + \lambda \cdot (\vec{OP} - \vec{OQ}), \lambda \in \mathbb{R}$$

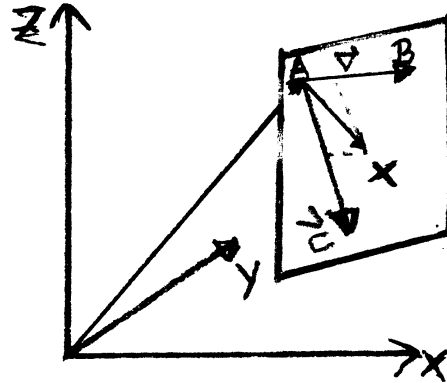


Abbildung 15: Ebene im \mathbb{R}^3

Parameterdarstellung einer Ebene im \mathbb{R}^3 Betrachte Ebene E mit Anfangspunkt A und den (linear unabhängigen, d.h. $\vec{u} \nparallel \vec{v}$ und $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$) Vektoren \vec{u} und \vec{v} . Ein Raumpunkt x liegt genau dann auf E , wenn sich der Vektor \vec{AX} darstellen lässt als

$$\vec{AX} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}, \text{ mit } \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$$

$$\implies \vec{OX} = \vec{OA} + \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}$$

Werden \vec{u} und \vec{v} durch die drei Punkte $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), C(c_1, c_2, c_3)$ bestimmt, $\vec{u} = \vec{AB}, \vec{v} = \vec{AC}$, dann erhält man die 3-Punkt-Parameterdarstellung der Ebene

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix}, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$$

$$\vec{OX} = \vec{OA} + \lambda_1 \vec{AB} + \lambda_2 \vec{AC}$$

Beispiel

In einem kartesischen Koordinatensystem gilt: $P(1,0,-1), Q(0,1,3)$.

$X(X_1, X_2, X_3)$ sei ein Punkt auf der Geraden durch P und Q $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot$

$\begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 0 - 1 \\ -1 - 3 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ In Komponenten lautet sie :

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + \lambda \\ x_2 &= -\lambda \\ x_3 &= -1 - 4 \cdot \lambda \end{aligned}$$

Zum Parameterwert $\lambda = 6$ gehört der Punkt $B(7, -6, -25)$. Durch Elimination von λ , erhält man 2. lineare Gleichungen in x_1, x_2, x_3 , die Koordinatengleichungen der Geraden im \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - x_2 \\ x_3 &= -1 + x_2 \cdot 4 \end{aligned}$$

Merke:

Eine Gerade im \mathbb{R}^3 wird durch 2 lineare Gleichungen beschrieben

Lage zweier Geraden

$$g_1 : \vec{OX} = \vec{OP}_1 + \lambda \vec{P}_1 \vec{Q}_1, g_2 : \vec{OX} = -\vec{OP}_2 + \lambda \vec{P}_2 \vec{Q}_2$$

1. Die zwei Geraden fallen zusammen.
2. Die zwei Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.
3. Die beiden Geraden sind parallel, aber fallen nicht zusammen.
4. Die zwei Geraden sind windschief, d.h. es gibt zwei parallele Ebenen, werden von den Richtungsvektoren der beiden Geraden aufgespannt.

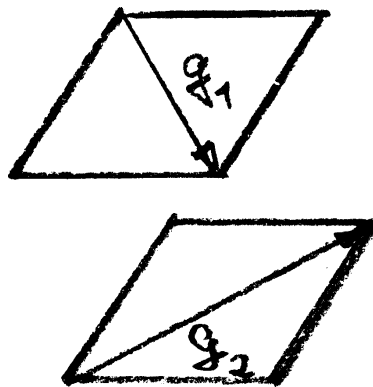


Abbildung 16: windschiefe Geraden

Sei $O\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $a_1 a_2 a_3$ sei ein beliebiger Punkt auf E, A sein ein fester Punkt auf

E.

Hesse-Normalform:

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 \end{pmatrix}, \vec{n} \right\rangle$$

7.1.5 Substitutionsregel

12.05.06

Ausmultiplizieren:

$$n_1(x_1 - a_1) + n_2(x_2 - a_2) + n_3(x_3 - a_3) = 0$$

Folglich bilden alle Lösungen einer linearen Gleichung $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$ eine Ebene in \mathbb{R}^3 . Dabei sind $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ gegeben und erfüllen $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$

Bemerkung. (7.1.3) Einsetzen der Koordinaten eines beliebigen Punktes $Q = (q_1, q_2, q_3)$ in die HNF (Hesse-Normalform)

$$d = \left\langle \begin{pmatrix} q_1 - a_1 \\ q_2 - a_2 \\ q_3 - a_3 \end{pmatrix}, \vec{n} \right\rangle.$$

Dann gibt $|d|$ den Abstand des Punktes Q von der Ebene an.

Achsenabschnittsform der Ebene

Die Ebene E

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

geht durch die Punkte

$$A(a, 0, 0) \in x - \text{Achse}; \quad B(0, b, 0) \in y - \text{Achse}; \quad C(0, 0, c) \in z - \text{Achse}$$

Das Dreieck ABC stellt deshalb ein Stück der Ebene E dar.

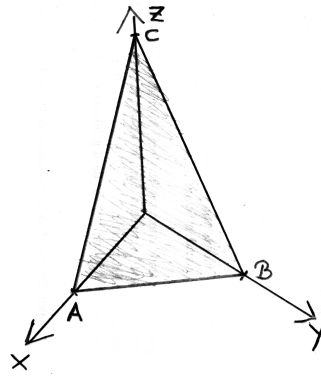


Abbildung 17: Dreieck ABC

Lage zweier Ebenen zueinander

1. Die beiden Ebenen fallen zusammen.
2. Die Ebenen sind parallel und fallen nicht zusammen.
3. Die Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

Beispiel 1. xy -Ebene: $z = 0$ und $7 \cdot z = 0$

2. Ebene $z = 0$ und Ebene $z = 3$
3. Ebene $z = 0$ und Ebene $x = 0$ (Schnitt ist Gerade $x = z = 0$, d.h. y -Achse)

Lage einer Ebene und einer Gerade (im \mathbb{R}) zueinander

1. Ebene und Gerade schneiden sich in einem Schnittpunkt.
2. Die Gerade liegt ganz in der Ebene.
3. Die Gerade liegt parallel zur Ebene, es gibt keinen Schnittpunkt.

Beispiel 1. Ebene $z = 0$ und Gerade $x = y = 0$ (z -Achse) schneiden sich im Ursprung $(0,0,0)$.

2. z -Achse $x = y = 0$ liegt ganz in der xz -Ebene $y = 0$.
3. z -Achse $x = y = 0$ liegt parallel zur Ebene $y = 2$.

7.2 Vektorrechnung im \mathbb{R}^n

1. Lineare Gleichungssysteme
2. lineare DGL

Übertragung des Begriffes des Vektors aus dem \mathfrak{R}^2 und \mathfrak{R}^3 in den \mathfrak{R}^n .

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ mit } x_i \in \mathfrak{R} \text{ heißt } \underline{n\text{-dimensionaler Vektor}} \text{ oder } \underline{\text{Tupel}}$$

$$\mathfrak{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathfrak{R}, x_2 \in \mathfrak{R}, \dots, x_n \in \mathfrak{R} \right\}$$

Das Koordinatensystem ist durch n verschiedene Einheitsvektoren gegeben.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jeder Vektor lässt sich durch Angabe seiner Komponenten schreiben:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Es übertragen sich die Begriffe: Betrag, Gleichheit von Vektoren, Multiplikation mit einem Skalar, Addition,- (Skalarprodukt, Orthogonalität)

Addition und Multiplikation mit einem Skalar

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\vec{a} + \vec{b} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \vec{a} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$$

Es übertragen sich die Rechengesetze der reellen Zahlen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n; k, l \in \mathbb{R}$
Es gelten die Rechengesetze der Addition

$$(A_1) \text{ Assoziativgesetz: } \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

(A₂) Kommutativgesetz: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

(A₃) Es existiert ein Nullvektor mit der Eigenschaft: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

(A₄) Es existiert ein inverser Vektor $-\vec{a}$ mit der Eigenschaft: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Es gelten die Rechengesetze der Multiplikation mit einem Skalar (Skalar-Multiplikation):

(S₁) Assoziativgesetz: $k \cdot (l \cdot \vec{a}) = (k \cdot l) \vec{a}$

(S₂) Distributivgesetz 1: $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$

(S₃) Distributivgesetz 2: $(k + l) \vec{a} = k \vec{a} + l \vec{a}$

(S₄) Gesetz der Eins: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

Vektorräume

Definition 7.2.1

Eine Menge V bildet einen Vektorraum über \mathbb{R} , wenn folgende Axiome gelten:

1. In V ist eine innere Verknüpfung “+” erklärt,

$$+ : V \times V \mapsto V \text{ mit } (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} + \vec{b}$$

(Addition), sodass $(V, +)$ die Gesetze der Addition (A₁) – (A₄) erfüllt.

2. In V ist eine äußere Verknüpfung “·” erklärt,

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \mapsto V \text{ mit } (\lambda, \vec{a}) \mapsto \lambda \cdot \vec{a}$$

(Multiplikation mit einem Skalar), sodass (V, \cdot) die Gesetz der Multiplikation mit einem Skalar (S₁) – (S₄) erfüllt.

Ein Element aus einem Vektorraum bezeichnen wir als Vektor (auch wenn kein Vektorraum nicht dem \mathbb{R} entspricht). Hat man als Zahlenmenge nicht \mathbb{R} , sondern einen anderen Körper K (z.B. $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{C}$), so spricht man von einem Vektorraum über K .

Linearkombination und Erzeugnis, Spann

Im Folgenden sei $(V, +, \cdot)$ ein (nicht notwendig endlich dimensional) Vektorraum (VR) und

Definition 7.2.2

Ein Vektor \vec{b} der Form

$$\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_m \vec{a}_m$$

heißt linearkombination (kurz LK) der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$.

Beispiel

1

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ ist LK aus } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ ist LK von } \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3.$$

18.05.06

Definition 7.2.3

Vector $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_m \vec{a}_m$ heißt Linearkombination von $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$

Definition 7.2.4

Die Menge der Vektoren

$$\left\{ \vec{b} \mid \vec{b} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i, \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} \xrightarrow{\text{def}} \text{span} \{ \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \} = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m] \quad (3)$$

heißt Erzeugnis oder Spann der Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$.

Definition 7.2.5

Sei $(V, +, \cdot)$ ein VR. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt Untervektorraum (UVR), wenn U bzgl. der Operationen $+$ und \cdot ein Vektorraum bildet.

Satz 7.2.6

UVR-Kriterium Eine Teilmenge $U \subset V$ mit $U \neq 0$ ist UVR $\iff [\vec{a}, \vec{b} \in U \implies \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \in U, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Beispiel

$\vec{0}$ ist der kleinste UVR in jedem VRs.

Beispiel

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist UVR vom } \mathbb{R}^3$$

Beispiel

Allgemein gilt: $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \in (V, +, \cdot) \implies \text{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\} (V, +, \cdot)$.

Definition 7.2.7

Eine Teilmenge $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \in V$ heißt Erzeugendensystem, wenn $\text{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\} = V$.

Beispiel

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ist Erzeugendensystem von \mathbb{R}^3 .

Beispiel

$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Erzeugendensystem von \mathbb{R}^3 .

Wir suchen das kleinstmögliche Erzeugendensystem.

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren**Beispiel**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Dann ist $\vec{c} = 2 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b}$, \vec{c} ist LK von \vec{a}, \vec{b} . Man nennt \vec{c} linear abhängig von \vec{a} und \vec{b} .

Definition 7.2.8

Die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \in V$ heißen linear abhängig wenn es eine Lösung von

$$k_1 \vec{a}_1 + \dots + k_m \vec{a}_m = \vec{0}$$

gibt, mit mindestens einem $k_i \neq 0$.

Die Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \in V$ heißen linear unabhängig, wenn

$$k_1 \vec{a}_1 + \dots + k_m \vec{a}_m = \vec{0} \implies k_1 = \dots = k_m = 0$$

Beispiel

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sind linear unabhängig.

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies k_{1,2,3} = 0$$

Basis und Dimension**Definition 7.2.9 Basis und Dimension**

$\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\}$ ist Basis von V

(B1) $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\}$ sind linear unabhängig

(B2) $\text{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m\} = V$

Beispiel

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ist die Basis von \mathbb{R}^3

Beispiel

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis des \mathbb{R}^3

In einem VR gibt es in der Regel viele Basen. Hat man jedoch eine endliche Basis $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ gefunden, so besteht jede andere Basis auch aus genau n linear unabhängigen Vektoren.

Bezeichnung $\dim(V) = n$

Bemerkung. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$

Bemerkung. Es gibt auch VRe mit unendlicher Dimension (z.B die Menge aller Polynome von beliebigem Grad)

Satz 7.2.10

Sei V ein VR mit $\dim(V) = n$. Dann gilt für n Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$:

$\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ linear unabhängig $\iff \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ ist Basis

7.2.1 Lineare Gleichungssysteme, Matrizen und Determinanten

$$x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \quad (\text{G1})$$

$$-2x_1 + 2x_3 = 2 \quad (\text{G2})$$

$$x_1 + x_2 = 2 \quad (\text{G3})$$

Folgende Umformungen lassen die Lösung(en) unverändert.

- Multiplikationen einer Gleichung mit reeller Zahl $\lambda \neq 0$
- Addition einer Gleichung zu einer anderen Gleichung
- Vertauschen der Reihenfolge von Gleichungen ("Zeilenvertauschen")

Diese drei Umformungen werden auf systematische Weise im Gauß-Algorithmus angewendet. Diese sollte man auswendig beherrschen.

Gauß-Algorithmus

1. Elimination von x_1 aus (G2), (G3)

$$(\text{G1}) \quad x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0$$

$$(\text{G2}') (\text{G2} + 2\text{G1}) \quad -10x_2 + 8x_3 = 2$$

$$(\text{G3}') (\text{G3} - \text{G1}) \quad 6x_2 - 3x_3 = 2$$

2. Elimination von x_2 aus (G3)

$$\begin{aligned}(G1) \quad x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= 0 \\(G2') \quad -10x_2 + 8x_3 &= 2 \\(G3'') \quad (G3' + \frac{6}{10}G1) \quad \frac{9}{5}x_3 &= \frac{16}{5}\end{aligned}$$

Der Gauß Algorithmus liefert ein lineares Gleichungssystem in Dreiecksform

Zusammenfassung

- Erster Auflösungsschritt nach x_3 in (G_3'') : $x_3 = \frac{16}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{16}{9}$
- Zweiter Auflösungsschritt nach x_2 in (G_2') : $x_2 = \frac{16}{9}$ einsetzen und nach x_2 auflösen:
 $x_2 = \frac{11}{9}$.
- Dritter Auflösungsschritt nach x_1 in (G_1) : x_3, x_2 einsetzen nach x_1 auflösen: $x_1 = \frac{7}{9}$.

Um Schreibarbeit zu sparen: Matrixschreibweise. Beim vorhergehenden Beispiel.

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ausmultiplizieren nach Regel "Zeile \times Spalte". Die Dimensionen müssen dabei übereinstimmen.

Definition 7.2.11

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

heißt quadratische $n \times n$ -Matrix. $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ heißt Diagonale der Matrix A .

Rechenoperationen für Matrizen

Sei $s \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$s \cdot A \stackrel{\text{def}}{=} s \cdot (a_{ij}) = \begin{pmatrix} s \cdot a_{11} & \dots & s \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s \cdot a_{n1} & \dots & s \cdot a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A + B \stackrel{\text{def}}{=} (a_{ij}) + (b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^T \stackrel{\text{def}}{=} (a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Bezeichnung: Ist $A = A^T$, so heißt A symmetrisch

Beispiel

Durch Spiegelung an der Diagonalen erhält man die transponierte Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad (5)$$

(Spalten)-Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ sind $n \times 1$ Matrizen.

Zeilenvektoren $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ sind $1 \times n$ Matrizen.

19.05.06

Matrixmultiplikation

$$A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \vec{x}^T = (x_1, \dots, x_n)$$

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{a_{11}b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1}}^{c_{11}} & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Allgemein gilt für ein Matrixelement c_{ij} der Matrix C:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$\vec{y} = A\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} = (y_i) \quad i = 1, \dots, n \quad \text{mit } y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$$

$$\vec{z}^T = \vec{x}^T A = (* \dots *) = (* \dots *) \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * \end{pmatrix} = (z_j)^T \quad j = 1, \dots, n \quad \text{mit } z_j = \sum_{k=1}^n x_k a_{kj}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 37 \end{pmatrix}$$

$$(1 \ 3) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = (11 \ 16)$$

Beachte: in der Vorlesung sind Vektoren im allgemeinen Spaltvektoren in den Büchern ist es zum Teil verschieden.

Bemerkung. Im Allgemeinen gilt $A \cdot B \neq B \cdot A$ für $a, b \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Beweis. mit Beispiel, s.Ü.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

□

Rechenregeln Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Dann gilt:

1. $(A \cdot B)C = A(B \cdot C)$
2. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
3. $A(B+C) = A \cdot B + A \cdot C$
4. $(A+B)C = A \cdot C + B \cdot C$
5. $(A^T)^T = A$

Diese Rechenregeln folgen aus den Rechenregeln für die reellen Zahlen zusammen mit der Definition der Matrixmultiplikation.

Definition 7.2.12 Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix} = \text{diag}(d_{11}, \dots, d_{nn}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Satz 7.2.13

Die Diagonalmatrix

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

heißt n-dimensionale Einheitsmatrix Es gilt: $I \cdot A = A \cdot I = A$ für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Satz 7.2.14

Falls es zu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ein $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $AQ = I$ gibt, so heißt $Q \stackrel{\text{def}}{=} A^{-1}$ inverse Matrix zu A

Es gilt: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ und $(A^{-1})^{-1} = A$

Beispiel

Falls $ad - bc \neq 0$, dann besitzt die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ die inverse Matrix } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Beweis durch Nachrechnen von $AA^{-1} = I$

Nicht jede inverse Matrix A besitzt eine inverse Matrix !

Rechenregeln Seien A,B reguläre = nicht singulär = invertierbar Matrix, d.h. $\exists A^{-1}$ und $\exists B^{-1}$ Dann gilt

$$A^{-1}B^{-1} = (B \cdot A)^{-1} \text{ und } (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

.

Satz 7.2.15

Eine quadratische Matrix A, mit der speziellen Eigenschaft $A \cdot A^T = I$ heißt orthogonal.

Damit gilt für eine orthogonal Matrix A:

$A^{-1} = A^T$ und $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$ Reelle orthogonale Matrizen beschreiben Drehungen und Spiegelungen.

Die Zeilen (und auch die Spalten) einer orthogonalen Matrix bilden gerade ein Orthornormalsystem (Skalarprodukteigenschaften).

Determinanten

Wir führen rekursiv Determinanten von quadratischen ($n \times n$) Matrizen ein und starten mit $n = 1$ und $n = 2$

Definition 7.2.16

(1×1)-Determinanten

Matrix $(a) \in \mathfrak{R}^{1 \times 1} = \mathfrak{R}$ hier $a = (a)$

Determinante $\det(a) := a$

(2×2)-Determinante:

$$\text{Matrix } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$$

$$\text{Determinante } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - cb$$

Beispiel

$$\det \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 7 \cdot 2 - 3 \cdot 8 = 14 - 24 = -10$$

Satz 7.2.17

($n \times n$)-Determinante (Entwicklungssatz von Laplace) $2 \leq n$:
Gegeben ist die quadratische Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$$

Satz 7.2.18

”Entwicklung der Determinante nach der j-ten Spalte”:

$$\det(A) := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det \tilde{A}_{ij}$$

für ein festes $j \in 1, \dots, n$ Dabei ist \tilde{A}_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$ -Untermatrix, die aus A entsteht, indem die i-te Zeile und die j-te Spalte gestrichen wird.

Beispiel

n=3

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \underbrace{\det \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{0-10} + (-1)^{2+1} \cdot 3 \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 4 \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = -4$$

Beispiel

n=4 Entwicklung: j= 2te Spalte

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 9 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 8 & 3 & 10 & 11 \end{pmatrix} = 4(-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 10 & 11 \end{pmatrix} + 9(-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 10 & 11 \end{pmatrix} \\ + (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 8 \\ 8 & 10 & 11 \end{pmatrix} + 3(-1)^{4+2} \det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Sie sehen, für die Berechnung einer 4×4 -Determinante müssen Sie 4 verschiedene (3×3) -Determinanten ausrechnen, für jede der (3×3) -Determinanten müssen Sie 3 (2×2) -Determinanten ausrechnen, also sind insgesamt $4 \cdot 3 \cdot (2 \times 2)$ Determinanten zu berechnen. Man braucht also etwa $n!$ viele Rechneroperationen um eine allgemeine $(n \times n)$ -Determinante auszurechnen.

26.05.06

Wichtig Entwicklungssatz von Laplace!!! Nur für $n = 3$

Definition 7.2.19

Regel von Sarraus für (3×3) -Determinanten

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} : aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Schreibweise für Matizen: Determinante von $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\det(A) = |A| = ad - bc$$

Anwendung: Wenn $\det(a) \neq 0$ dann ist die Cramersche-Regel zur Lösung von 2×2 LGS praktisch:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Dann hat das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ die eindeutige Lsg:

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

Für $n \geq 3$ ist die Cramersche-Regel zu teuer \implies Gauß Algorithmus ist billiger!

Praktischer Tip: Man wähle eine Zeile/ Spalte zum Entwickeln mit möglichst vielen Nullen, das spart die Berechnung von Unterdeterminanten (rekursiv).

Beispiel

Bei nachfolgender Matrix bietet sich die Entwicklung nach der 1. Spalte an.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -2(6 - 12) = 12$$

Rechenregeln für Determinanten

a)

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

b) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

c) Die Determinante ist 0, falls Zeilen (oder Spalten) linear abhängig sind.

d) $\det(A) = \det(A^T)$

1.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

(folgt aus 1. und 2.)

2.

$$\det(k \cdot I) = k^n \text{ für } I = (n \times n) \text{ Einheitsmatrix}$$

3. Vertauschen zweier Zeilen (oder Spalten) ändert das Vorzeichen.

4. $\det \tilde{A} = k \det A$, falls \tilde{A} aus A durch Multiplikation einer Zeile (oder Spalte) mit dem Faktor k entstand.

5. Addition eines Vielfachen einer Zeile (oder Spalte) zu einer anderen Zeile (oder Spalte) ändert am Wert der Determinante nichts.

Achtung: $\det(A + B) \stackrel{i.Allg.}{=} \det A + \det B$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \det A = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \det B = 4$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \det(A + B) = 12 \neq 3 + 4$$

$$\text{Achtung: } \det(A) = \det(B) \stackrel{i.Allg.}{\neq} A = B$$

Bemerkung: Determinanten vollbesetzter Matrizen mit $n > 3$ müssen in der Praxis so gut wie nie berechnet werden.

Weitere Beispiele von linearen Gleichungssystemen

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gau\ss}} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die Lösung setzt man $x_2 = c$ und erhält:

$$x_1 = \frac{8 - 3c}{2} \text{ und } x_2 = c, \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

Es gibt also ∞ viele Lösungen.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Diese zweite Gleichung ist nicht lösbar. \implies Es gibt keine Lösung des LGS.

Definition 7.2.20

Eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

heißt Rechteckmatrix.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{r \times p}$. Das Matrixprodukt AB ist nur für zusammenpassende Matrizen erklärt.

$$\begin{array}{lcl} \text{Länge der Zeilen von A} & = & \text{Länge der Spalten von B} \\ \underbrace{\text{Anzahl (Spalten von A)}}_m & = & \underbrace{\text{Anzahl (Zeilen von B)}}_p \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{c} * \dots * \\ \vdots \\ * \dots * \end{array} \right\} \begin{array}{c} n \\ \vdots \\ n \end{array} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_m \\
 \mathbb{R}^{n \times m}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{c} * \dots * \\ \vdots \\ * \dots * \end{array} \right\} \begin{array}{c} \rho = m \\ \vdots \\ \rho = m \end{array} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_q \mathbb{R}^{n \times q}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{c} * \dots * \\ \vdots \\ * \dots * \end{array} \right\} \begin{array}{c} n \\ \vdots \\ n \end{array} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_q \\
 \mathbb{R}^{n \times q}
 \end{array}$$

Bemerkung. Für $(n \times m)$ -Rechteckmatrizen mit $n \neq m$ gibt es keine Determinanten und keine Inverse.

Definition 7.2.21

Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von B nennt man Spaltenrang von B , in Zeichen: $\text{Rang}(B) = \text{Rg}(B)$

Bemerkung. Sei $b \in \mathbb{R}^{n \times m} \implies \text{Rang}(B) \leq \text{Anzahl Spalten} = m$

Die Spaltenvektoren sind n -dim. Vektoren $\implies \text{Rang}(b) \leq n$

Zusammen: $\text{Rang}(B) \leq \min(m, n)$.

Bemerkung. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen von B nennt man Zeilenrang von B . Es gilt: Spaltenrang = Zeilenrang. Man spricht deshalb nur kurz von Rang

Lösungsverhalten linearer Gleichungssysteme

Zunächst homogene lineare Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{0}$

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

- Eine Lösung ist immer $\vec{x} = \vec{0}$
- Spalten von A linear unabhängig $\Leftrightarrow \text{Rang}(A) = n \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$ (eindeutige Lösung)
- Spalten von A linear abhängig $\Leftrightarrow \text{Rang}(A) < n \Rightarrow \exists \vec{x} \neq \vec{0}$ (mehrere Lösungen)

Die Menge aller Lösungen von $A\vec{x} = \vec{0}$ nennt man Kern von A .

$$\text{Also: } \vec{x} \in \text{Kern}(A) \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$$

Wir betrachten zwei Vektoren $\vec{x} \in \text{Kern}(A), \vec{y} \in \text{Kern}(A)$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und berechnen.

$$A(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = A(\lambda\vec{x}) + A(\mu\vec{y}) = \lambda \underbrace{A\vec{x}}_{\vec{0}} + \mu \underbrace{A\vec{y}}_{\vec{0}} = \vec{0}$$

Wir haben gezeigt

$$\vec{x}, \vec{y} \in \text{Kern}(A) \Rightarrow \lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \in \text{Kern}(A) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Also ist $\text{Kern}(A)$ ein Untervektorraum!

- Die Summe zweier Lösungen des homogenen LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ ist wieder eine Lösung von $A\vec{x} = \vec{0}$.
- Das Vielfache einer Lösung des homogenen LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ ist wieder eine Lösung von $A\vec{x} = \vec{0}$.

Wir betrachten inhomogene lineare Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}$

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}}_{=: \vec{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}}_{=: \vec{a}_2} + \dots + x_n \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}}_{=: \vec{a}_n} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (7)$$

Es gibt eine Lösung, wenn \vec{b} Linearkombination von den Spaltenvektoren von A , bezeichnet mit \vec{a}_i ist.

$$b \in \text{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$$

$$\text{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = \text{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}\}$$

$$\text{Rang}(\text{ } A) = \text{Rang}(A, \vec{b}) \implies \text{Es gibt eine Lösung } A\vec{x} = \vec{b}$$

u

$$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A, b) \implies \text{Es gibt eine Lösung von } A\vec{x} = \vec{b}$$

01.06.06

Annahme: Im Folgenden sei $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A, \vec{b})$, d.h. es gibt mindestens eine Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$. Wie viele Lösungen des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ gibt es?

Seien \vec{x} und \vec{y} zwei Lösungen.

$$\left. \begin{array}{l} A\vec{x} = \vec{b} \\ A\vec{y} = \vec{b} \end{array} \right\} A\vec{x} - A\vec{y} = \vec{b} - \vec{b} \iff A(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}$$

1. Fall: $\text{Rang}(A) = n$ Das homogene LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ hat als einzige Lösung $\vec{x} - \vec{y} = \vec{z} = \vec{0} \implies \vec{x} = \vec{y}$ Beide Lösungen von $A\vec{x} = \vec{b}$ sind gleich. Es gibt genau eine Lösung des inhomogenen LGS.

2. Fall $\text{Rang}(A) < n \implies$ Es gibt nicht-triviale Lösungen des homogenen LGS. Jede Lösung \vec{X}_{inhom} von $A\vec{x} = \vec{b}$ lässt sich darstellen als $\vec{X}_{inhom} = X_{inhom, spez} + \vec{z}$ mit $\vec{z} \in \text{Kern}(A)$

Bemerkung. Falls $\vec{b} \neq \vec{0}$, so ist die Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ kein UVR

Sei \vec{x} Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$

$\implies 2\vec{x}$ ist keine Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$, sondern $A(2\vec{x}) = 2\vec{b} \neq \vec{b}$

7.2.2 Ergebnisse und Folgerungen

1. Ein homogenes LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ hat immer $\vec{x} = \vec{0}$ als Lösung (sogenannte triviale Lösung)
2. Ein homogenes LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ hat die eindeutige Lösung $\vec{x} = \vec{0} \iff \text{Rang}(A) = n$
3. Ein homogenes LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ hat eine nicht triviale Lösung $\vec{x} \neq \vec{0} \iff \text{Rang}(A) < n$
4. Lösungsmenge $\text{Kern}(A)$ eines homogenen LGS $A\vec{x} = \vec{0}$ bildet einen UVR und es gilt: $\dim(\text{Kern}(A)) + \text{Rang}(A) = n$
5. Ein inhomogenes LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ hat eine Lösung $\iff \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A, \vec{b})$
6. Ein inhomogenes LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ hat genau eine Lösung $\iff \text{Rang}(A) = n$
7. Die Differenz zweier Lösungen des inhomogenen LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ liegt im UVR $\text{Kern}(A)$

Das Lösungsverhalten und $\text{Rang}(A)$, sowie $\text{Rang}(A, \vec{b})$ kann auch am durch den Gauß-Algorithmus transformierter LGS abgelesen werden.

Ergebnis der Eliminationsschritte des Gauß-Algorithmus

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vdots \\ \vec{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{c}_1 \\ \vdots \\ \vec{c}_n \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\text{Falls } \tilde{a}_{11} \neq 0, \dots, \tilde{a}_{nn} \neq 0 \implies \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A, \vec{b}) = n \quad (9)$$

In der Mathematik zeigt man, dass $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(\tilde{A}), \text{Rang}(A, \vec{b}) = \text{Rang}(\tilde{A}, \vec{c})$

Wenn der Gauß-Algorithmus folgendes System liefert:

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \dots & \dots & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \tilde{a}_{rr} & \dots & \tilde{a}_{rn} \\ \vdots & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ c_{r+1} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

mit $\tilde{a}_{ii} \neq 0$ für $i = 1, \dots, r$ und $c_{r+1} = \dots = c_n = 0$ dann gilt $\text{Rang}(\tilde{A}) = \text{Rang}(A) = r$ und $\text{Rang}(\tilde{A}, \tilde{c}) = \text{Rang}(A, \tilde{b}) = r$ und es gibt (mehrere) Lösungen.

Falls Falls $\tilde{a}_{11} \neq 0, \dots, \tilde{a}_{rr} \neq 0$ und mindestens ein $c_j \neq 0$ für $j \in \{r+1, \dots, n\}$, dann gilt $\text{Rang}(\tilde{A}) = \text{Rang}(A) = r$ und $\text{Rang}(\tilde{A}, \tilde{c}) = \text{Rang}(A, \tilde{b}) > r$ und es gibt keine Lösung. Falls ein a_{ii} beim Gauß-Alg. 0 ist bzw. 0 wird, so müssen gegebenenfalls Zeilen (oder Spalten) vertauscht werden (Übung).

Einige Praktische Rechenregeln

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

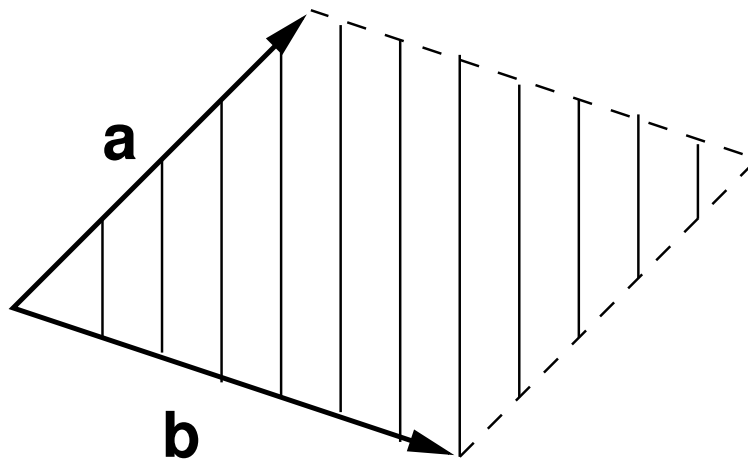
- $\text{Rang}(A) = n \iff \det A \neq 0$ Derterminante entspricht n-dim. Volumen (vorzeichenbehaftet).
n=2: Flächeninhalt des durch die Spalten von A aufgespannten Parallelogramms.
n=3: Volumen des durch Spalten von A aufgespannten Spats.
- $\text{Rang}(A) < n \iff \det A = 0$

Beispiel

$$\begin{vmatrix} a & ra \\ b & rb \end{vmatrix} = arb - rab = 0$$

- 2-Spat= Parallelogramm, Flächeninhalt= Länge (Kreuzprodukt)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left| \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right|$$



- 3-Spat= Spat (vorzeichenbehaftetes) Volumen $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \det \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

7.2.3 Die inverse Matrix

Wann existiert sie? Ist sie eindeutig? Wie kann ich sie berechnen?

Falls eine inverse Matrix Q existiert, erfüllt sie die Bedingungsgleichung

$$A \cdot Q = I, \quad \text{wobei } Q = (\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n) = \begin{pmatrix} \vec{q}_{11} & \dots & \vec{q}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{q}_{n1} & \dots & \vec{q}_{nn} \end{pmatrix} \text{ unbekannt ist.}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{} & \dots & \boxed{} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{} & \dots & \boxed{} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\vec{q}_1} & \dots & \boxed{\vec{q}_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\vec{e}_1} & \dots & \boxed{\vec{e}_n} \end{pmatrix}$$

Abbildung 18: Matrixprodukt

Die Bedingungsgleichungen lässt sich aufspalten in n LGS.

$$A\vec{q}_1 = \vec{e}_1, \dots, A\vec{q}_n = \vec{e}_n$$

Diese können etwa mit dem Gauß-Algorithmus gelöst werden. Damit die inverse Matrix Q existiert, müssen alle LGS $A\vec{q}_i = \vec{e}_i$ lösbar sein.

$$\implies \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A, \vec{e}_1) = \dots = \text{Rang}(A, \vec{e}_n)$$

$$\implies \vec{e}_i \in \text{span}\{\text{Spaltenvektoren von } A\} \text{ für } i = 1, \dots, n$$

$$\implies \text{Die } n \text{ Spaltenvektoren von } A \text{ sind linear unabhängig}$$

$$\implies \text{Rang}(A) = n$$

Umgekehrt folgt aus $\text{Rang}(A) = n$ auch $\text{Rang}(A, \vec{e}_i) = n$. Das heißt die Lösungsvektoren \vec{q}_i sind eindeutig. In Anlehnung zu reellen Zahlen wird die Inversematrix geschrieben als A^{-1} , aber:

$$\cancel{A^{-1} = \frac{1}{A}}$$

Ergebnis: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A^{-1} \text{ existiert} \iff \text{Rang}(A) = n \iff \{A \text{ invertierbar, } A \text{ regulär, } A \text{ nicht singulär}\}$$

Wenn A^{-1} existiert, ist A^{-1} eindeutig.

Zusammenhang mit der Lösung LGS

Gegeben: $A\vec{x} = \vec{b}$, $\text{Rang}(A) = n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$

Es existiert A^{-1} und ist eindeutig

$$\begin{aligned} A^{-1}(A\vec{x}) &= A^{-1}\vec{b} \\ (A^{-1}A)\vec{x} &= A^{-1}\vec{b} \\ \vec{x} &= A^{-1}\vec{b} \end{aligned}$$

Elegantes Ergebnis, man beachte jedoch: Zur Berechnung der inversen Matrix sind zunächst einmal Gauß-Algorithmus nötig, diese lassen sich zwar gemeinsam effizient lösen, der Aufwand bleibt jedoch groß. Ergebnis praktisch nutzbar für orthogonale Matrizen, hier gilt: $A^{-1} = A^T$ d.h. A^{-1} ist ohne Rechenaufwand bereits bekannt.

Eine praktische Rechenregel

$$AA^{-1} = I \implies \det AA^{-1} = \det I \implies \det A \det A^{-1} = 1 \quad (10)$$

$$\implies \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \quad (11)$$

02.06.06

Lineare Abbildungen

Sei eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\vec{x} \mapsto \varphi(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} A \cdot \vec{x} \quad \text{mit } A \in (\mathbb{R})^{n \times n}$$

gegeben.

Beispiel

$$\begin{aligned} \vec{y} = A\vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \\ \vec{e}_1 &\mapsto \vec{e}_1, \vec{e}_2 \mapsto \vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 \end{aligned}$$

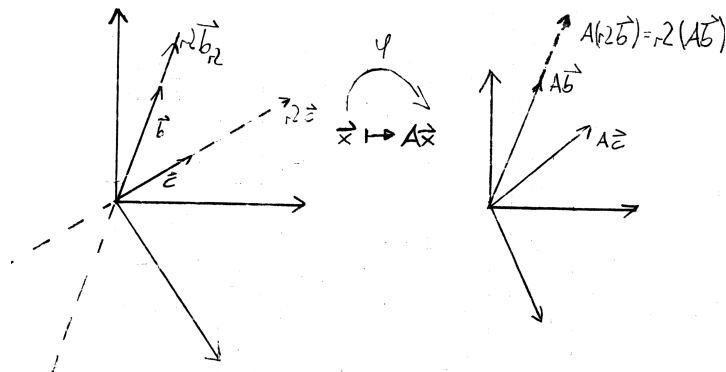
Mit den Rechenregeln für Vektoren und Matrizen erhält man:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) &= A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) \\ &= \alpha(A\vec{x}) + \beta(A\vec{y}) \\ &= \alpha\varphi(\vec{x}) + \beta\varphi(\vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Eine Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Eigenschaft $\phi(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\phi(\vec{x}) + \beta\phi(\vec{y})$ heißt lineare Abbildung.

Die Mathematik zeigt, dass sich jede lin. Abb. mit einer Matrix A als $\phi(\vec{x}) = A\vec{x}$ schreiben läßt.

Geometrische Deutung Wir stellen jede Vektoren im Urbild- und Bildraum durch den Repräsentanten dar, der am Ursprung beginnt.



Eigenschaft: Ursprungsgerade \mapsto Ursprungsgerade oder zum $\vec{0}$
Allgemein: $UVR \subset \mathbb{R}^n \mapsto UVR \subset \mathbb{R}^n$

Satz 7.2.22

Eine lin. Abb. ϕ ist durch die Bilder der Einheitsvektoren (oder einer Basis) aus dem Urbildraum bereits festgelegt.

Beweis. Seien \vec{e}_i die Einheitsvektoren $\in \mathbb{R}^n$

$\phi(\vec{e}_i = A\vec{e}_i = \vec{b}_i \in \mathbb{R}^n$ seien vorgegeben. Für alle $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$A\vec{x} = A(x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n) = x_1\phi(\vec{e}_1) + \dots + x_n\phi(\vec{e}_n) = x_1\vec{b}_1 + \dots + x_n\vec{b}_n \quad (12)$$

Die Spalten von A sind die Bilder der Einheitsvektoren. □

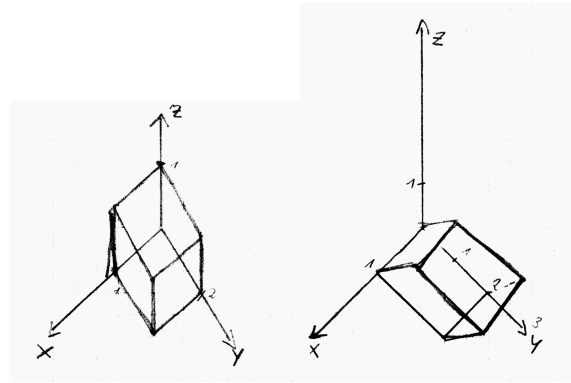
Beispiel • Die Nullabb.: $\varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$

- Die identische Abb.: $\varphi(\vec{x}) = I\vec{x} = \vec{x}$
- $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Eine Scherung des \mathbb{R}^3

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

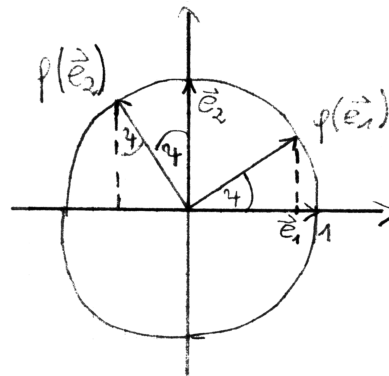


$(0, 0, 0) \mapsto (0, 0, 0)$	$(1, 0, 1) \mapsto (1, 1, 1)$
$(1, 0, 0) \mapsto (1, 0, 0)$	$(1, 2, 1) \mapsto (1, 3, 1)$
$(1, 2, 0) \mapsto (1, 2, 0)$	$(0, 2, 1) \mapsto (0, 3, 1)$
$(0, 2, 0) \mapsto (0, 2, 0)$	$(0, 0, 1) \mapsto (0, 1, 1)$

Tabelle 1: Wertetabelle zur Scherung

Beispiel

Die Drehung des \mathbb{R}^2 mit Drehwinkel ψ um den Ursprung ist eine lineare Abbildung.



$$\begin{aligned}
 \varphi(\vec{e}_1) &= \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} \\
 \varphi(\vec{e}_2) &= \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{pmatrix} \\
 \varphi(\vec{x}) &= (\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2))\vec{x} \\
 &= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}}_{\text{Drehmatrix A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

A ist orthogonal: $AA^T = I$

7.2.4 Wechsel des Koordinatensystems (im VR)

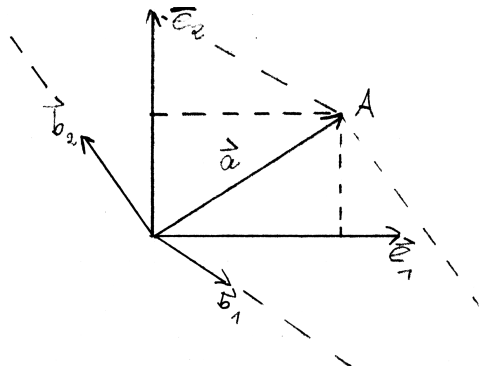


Abbildung 19: Wechsel der Basis von \vec{e}_1 und \vec{e}_2 zu \vec{b}_1 und \vec{b}_2

Allgemein: Ein Punkt A hat bzgl. der kanonischen Basis $(0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ die Koordinaten (a_1, \dots, a_n) und bzgl. einer anderen Basis $(0, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ die Koordinaten $(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n)$. Es gilt dann:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + \dots + a_n\vec{e}_n = \tilde{a}_1\vec{b}_1 + \dots + \tilde{a}_n\vec{b}_n$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \vec{b}_1 & \dots & \vec{b}_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}}_{B \in \mathbb{R}^{n \times n}} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \underbrace{(\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n)}_{B \in \mathbb{R}^{R \times n}} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \vdots \\ \tilde{a}_n \end{pmatrix},$$

wobei die \vec{b}_i die Koordinaten der neuen Basisvektoren im alten kanonischen Koordinatensystem $(0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ sind. Die Matrix B ist regulär.

Wenn das neue Koordinatensystem eine Orthonormalbasis ist, dann ist B eine orthogonale Matrix.

Affine Transformation

Im Anschauungsraum (affinen Raum) der Ortsvektoren kann ein Koordinatensystem auch parallel verschoben werden.

Eine Parallelverschiebung ist durch $\phi(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{c}$, $\vec{c} \neq \vec{0}$ fest, beschrieben. Ein Wechsel vom Koordinatensystem $(0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ in ein Koordinatensystem $(P, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ ist dabei durch eine Abb. vom Typ $\phi(\vec{x}) = B\vec{x} + \vec{a}$, B regulär beschreiben.

7.3 komplexe Zahlen

7.4 Eigenwerte und Eigenvektoren

- Lit: Meyberg/Vechenauer Bd 1., Kap. 6.6.7 S 326 ff.
- Ansorge/Oberle, Bd.1, Kap. 7.1, S. 168-185
- Lenpold, Bd.1, S 285-290

Motivation

- Lin. Abb. können recht kompliziert sein, so dass man auf den ersten Blick nicht mehr überblicken kann, wie die Menge aller Vektoren in Richtung und Länge durch die Abb. verändert werden.

Es interessieren also z.B. spezielle Vektoren, die mit der lin. Abb. nur in der Länge, aber nicht in der Richtung verändert werden.

- Bei der Lösung von lin. Differentialgl. systemen der Form $\frac{d}{dx}\vec{y}(x) = A\vec{y}(x)$ tritt folgende Frage auf: Gesucht ist ein Vektor $\vec{x} \neq 0$ für den gilt:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}$$

- Problemangepasstes Koordinatensystem für Ellipsoide, Kegel, ...

Definition 7.4.1

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $\vec{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \vec{0}$. Dann heißt \vec{x} Eigenvektor (EV) von A , wenn es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ gibt, mit

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

λ heißt dann Eigenwert (EW). D.h. der Nullvektor ist per Definitionem nie Eigenvektor!.

Geometrische Interpretation

Die lin. Abb. $A\vec{x}$ wirkt auf die EV \vec{x} wie eine Streckung mit dem Faktor λ (EW). Insbesondere wirkt die lin. Abb. $\varphi(\vec{y}) = A\vec{y}$ auch für alle Vektoren der speziellen Form $\vec{y} = \alpha\vec{x}$ (d.h. für Vielfache der EV) wie eine Streckung mit dem Faktor λ (EW):

$$\varphi(\vec{y}) = A\vec{y} = A(\alpha\vec{x}) = \alpha(A\vec{x}) = \alpha(\lambda\vec{x}) = \lambda\vec{y}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & -4 \end{pmatrix}; \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

liefert

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{1}_{=\lambda} \vec{x}$$

Hier ist der Vektor der Form $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ und $\alpha \neq 0$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$

08.06.06

Berechnungsmethode

- I. Man berechne alle Eigenwerte (EWe).
- II. Dann berechne man zu jedem EW den zugehörigen Eigenvektor (EV).

I. Berechnung der Eigenwerte → Umformulierung der Bestimmungsgleichung:

$$\begin{aligned} \exists \vec{x} \neq \vec{0} \text{ mit } A\vec{x} &= \lambda\vec{x} = \lambda \cdot I \cdot \vec{x} \\ \iff \exists \vec{x} \neq \vec{0} \text{ mit } (A - \lambda I)\vec{x} &= \vec{0} \\ \iff \text{Rang}(A - \lambda I) < n \\ \iff \det(A - \lambda I) &= 0 \end{aligned}$$

Satz 7.4.2

λ ist der Eigenwert der Matrix $A \iff \det(A - \lambda I) = 0$

Beispiel

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & -4 \end{pmatrix} \\ \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 7 & -5 \\ 0 & 3 - \lambda & -1 \\ 2 & 8 & -4 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda \\ &= -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \end{aligned}$$

\implies Eigenwerte sind $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$

Bemerkung. $\det(A - \lambda I)$ ist ein Polynom genau n'ten Grades für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, genannt das charakteristische Polynom. $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

\implies Es gibt über \mathbb{C} genau n Eigenwerte (nach ihrer Vielfachheit als Linearfaktoren gezählt) die eventuell zusammenfallen.

Man kann zeigen (auflösen der Determinante und umordnen der Glieder nach Potenzen von λ), dass für das charakteristische Polynom gilt:

$$\chi(\lambda) = (-\lambda)^n + (\text{Spur}A)(-\lambda)^{n-1} + \dots + \det A$$

mit $\text{Spur} A =$ Summen der Diagonalelemente von A

Definition 7.4.3

Vielfachheit der Nullstelle λ_i im charakteristischen Polynom = algebraische Vielfachheit des EW λ_i .

II. Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren Auflösen der Gleichung $(A - \lambda I)\vec{x} = 0$ mit dem zuvor berechneten EW λ .

Bemerkung. Da $\text{Rang}(A - \lambda I) < n$ gilt, gibt es mindestens einen EV $\vec{x} \neq \vec{0}$. (liefert Rechnung nur $\vec{0}$ als Lösung, so muss Rechenfehler vorliegen)

Mit \vec{x} ist auch $\alpha\vec{x}, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ Eigenvektor! D.h. EV sind nicht eindeutig.

Beispiel (Fortsetzung)

Gesucht sind die Eigenvektoren \vec{x} zum EW $\lambda_2 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 4-1 & 7 & -5 \\ 0 & 3-1 & -1 \\ 2 & 8 & -4-1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & -5 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

$$\xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

$$2. \text{ Gleichung liefert: } 2x_2 = x_3, \text{ setzt z.B. } x_3 = 1 \quad \Rightarrow \underline{x_2 = \frac{1}{2}}$$

$$1. \text{ Gleichung liefert: } 3x_1 = -7 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot 1 \quad \Rightarrow \underline{x_1 = \frac{1}{2}}$$

$$\text{Probe in der 3. Gleichung: } 2 \cdot \frac{1}{2} + 8 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot 1 = 0$$

Dabei ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zu $\lambda_2 = 1$. Nach Bemerkung 7.5.5 sind dann auch alle Vektoren $\alpha\vec{x}, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ Eigenvektoren zum EW $\lambda_2 = 1$. Wegen $\text{Rang}(A - \lambda I) = 2$ gilt: Alle EV zum EW $\lambda_2 = 1$ sind gegeben durch $\alpha\vec{x}, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Für den EW $\lambda_1 = 0$ erhält man alle zugehörigen EV durch $\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, indem man löst

$$\begin{pmatrix} 4-0 & 7 & -5 \\ 0 & 3-0 & -1 \\ 2 & 8 & -4-0 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

Für den EW $\lambda_3 = 2$ erhält man alle zugehörigen EV durch $\alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

indem man löst

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 7 & -5 \\ 0 & 3-2 & -1 \\ 2 & 8 & -4-2 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}.$$

Falls zu einem EW zwei lineare unabhängige EV \vec{x}_1 und \vec{x}_2 existieren, dann ist eine beliebige Linearkombination $\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2$ mit $\alpha_1 \in \mathbb{C}, \alpha_2 \in \mathbb{C}, (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ wieder EV.

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2) &= \alpha_1 A \vec{x}_1 + \alpha_2 A \vec{x}_2 \\ &= \alpha_1 \lambda \vec{x}_1 + \alpha_2 \lambda \vec{x}_2 \\ &= \lambda(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2) \end{aligned}$$

Folgerung

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ EW von A. Dann bildet die Menge aller EV zu λ vereinigt mit dem Nullvektor einen UVR

$$\text{UVR} = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \mid (A - \lambda I)\vec{x} = 0\} \cup \{\vec{0}\} = \text{Kern}(A - \lambda I)$$

Die Dimension dieses UVRs heißt geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ .

Bemerkung. ES gibt stets:

$1 \neq$ geom. Vielfachheit von $\lambda \neq$ algeb. Vielfachheit von $\lambda \neq n$

Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 2$

da $\chi(\lambda) = \dots (1 - \lambda)^2(2 - \lambda) = 0$

Alle Eigenvektoren zu $\lambda = 1$ liegen in $\text{span} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{dim}=2=\text{geom. Vielfachheit}} \right\} \setminus \{0\}$ Für $\lambda = 1$ ist daher

algeb. Vielfachheit = geom. Vielfachheit = 2

Alle Eigenvektoren zu $\lambda = 2$ liegen in $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \setminus \{0\}$

Für $\lambda = 2$ ist daher algeb. Vielfachheit = geom. Vielfachheit = 1.

Beispiel

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Alle EV zu $\lambda = 2$ liegen im $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \setminus 0$ Hier gilt: geometrische Vielfachheit = 1; algebr. Vielfachheit = 2

Beweis. Übung Nachrechnen □

7.4.1 Nützliche Hinweise für Rechenkontrolle.

Das charakteristische Polynom hat über \mathbb{C} genau n (nicht notwendig verschiedene) Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \Xi(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \sum_{j=0}^n b_j \lambda^j = (-\lambda)^n + (\text{spur}(A))(\lambda)^{n-1} + \dots + \det A \\ &= (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda) \end{aligned}$$

Zur Überprüfung der Koeffizienten b_n, b_{n-1}, b_0 des charakteristischen Polynoms kann (und sollte)

$$\begin{aligned} b_n &= (-1)^n \\ b_{n-1} &= \text{Spur} A = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \\ b_0 &= \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \end{aligned}$$

verwendet werden. Die aus dem charakteristischen Polynom berechneten Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ können (und sollten) dann nochmals in den Formeln für die Spur und die Determinante eingesetzt werden.

Merke: $\text{Spur}(A) =$ Summe Diagonalelemente der Matrix $A =$ Summe der Eigenwerte der Matrix A (gezählt mit algebr. Vielfachheit)

(vgl. spätere Kapitel: Begriff Divergenz)

Wie schaut es aus, wenn der Grundkörper der Zahlen \mathbb{R} ist? Bisher haben wir \mathbb{C} betrachtet:

- char. Polynom hat genau n Nullstellen
- nach algebr. Vielfachheit gezählt genau n Eigenwerte

Im \mathbb{R}^n zum Teil anders: Eine Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

besitzt keine reellen EW und keine reellen EV für $\varphi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. A im komplexen aufgefasst besitzt komplexe EW und EV.

- EW: $e^{i\varphi}$ mit $EV(1, -i)^T$
- EW: $e^{-i\varphi}$ mit $EV(1, i)^T$

Beweis: Nachrechnen.

09.06.06

7.5 Quadratische Formen und Quadritzen

Literatur:

- Leupold Band I, S. 178-194, 207-211
- Ansorge/Oberle Band I, S.183-198
- Meyberg/Vachenauer Band I, Kap 6.7, S. 339 ff
- ergänzende Literatur (sehr zu empfehlen): Leupold, Band I, S. 171-211

7.5.1 Quadratische Formen, Symmetrische Matrizen

Wir schauen uns geometrische Objekte an, die (implizit) durch quadratische Gleichungen beschrieben werden.

Beispiel

Ellipse im \mathbb{R}^2 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Hauptachsen a und b)

Kugel im \mathbb{R}^3 : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (Kugel mit Mittelpunkt=Ursprung und Radius R)

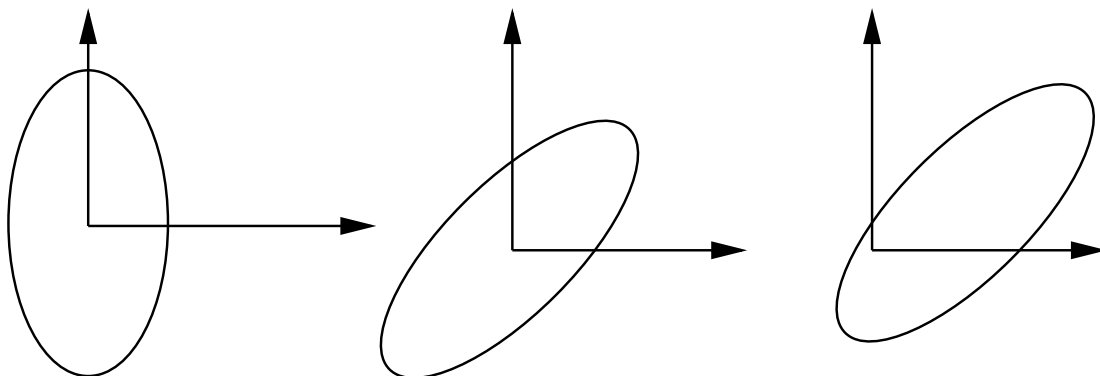


Abbildung 20: Kugel im \mathbb{R}^3

Berechnungsmethode

- I. Man berechne alle Eigenwerte (EWe).
- II. Dann berechne man zu jedem EW den zugehörigen Eigenvektor (EV).

I. Berechnung der Eigenwerte → Umformulierung der Bestimmungsgleichung:

$$\begin{aligned} \exists \vec{x} \neq \vec{0} \text{ mit } A\vec{x} &= \lambda\vec{x} = \lambda \cdot I \cdot \vec{x} \\ \iff \exists \vec{x} \neq \vec{0} \text{ mit } (A - \lambda I)\vec{x} &= \vec{0} \\ \iff \text{Rang}(A - \lambda I) < n \\ \iff \det(A - \lambda I) &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel 1

Für die Diagonalmatrix $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ lautet die rein quadratische Form :

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

Es sei $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ die Darstellung der quadratischen Form $q : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich des Standardkoordinatensystems $(0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Der Übergang zu einem anderen orthonormalen Koordinatensystem $(0, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ geschieht mit der Substitution $\vec{x} = B\vec{y}$. Dabei gilt $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ ist eine orthogonale Matrix. $\vec{y} = (x_1, \dots, x_n)^T$ sind die Koordinaten des Punktes $P(x_1, \dots, x_n)$ im Koordinatensystem $(0, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$. Dabei ergibt sich

$$q(\vec{x}) = q(B\vec{y}) = (B\vec{y})^T A (B\vec{y}) = \vec{y}^T \underbrace{B^T A B}_{\text{Matrix}} \vec{y} =: \tilde{q}(\vec{y})$$

Definition 7.5.1

Als Hauptachsensystem der quadratischen Form $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$, $A = A^T$ bezeichnet man eine Orthonormalbasis $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ des \mathbb{R}^n , wenn q im Koordinatensystem $(0, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ rein quadratisch ist.

Für den EW $\lambda_1 = 0$ erhält man alle zugehörigen EV durch $\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, indem man löst

$$\begin{pmatrix} 4-0 & 7 & -5 \\ 0 & 3-0 & -1 \\ 2 & 8 & -4-0 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

Für den EW $\lambda_3 = 2$ erhält man alle zugehörigen EV durch $\alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

indem man löst

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 7 & -5 \\ 0 & 3-2 & -1 \\ 2 & 8 & -4-2 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}.$$

Falls zu einem EW zwei lineare unabhängige EV \vec{x}_1 und \vec{x}_2 existieren, dann ist eine beliebige Linearkombination $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2$ mit $\alpha_1 \in \mathbb{C}, \alpha_2 \in \mathbb{C}, (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ wieder EV.

$$\begin{aligned} A(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2) &= \alpha_1 A\vec{x}_1 + \alpha_2 A\vec{x}_2 \\ &= \alpha_1 \lambda \vec{x}_1 + \alpha_2 \lambda \vec{x}_2 \\ &= \lambda(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2) \end{aligned}$$

Satz 7.5.2

Zu jeder quadratischen Form $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ mit $A = A^T$ gibt es mindestens ein Hauptachsensystem. Man berechnet es wie folgt:

Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass alle Eigenwerte verschieden sind, also etwa $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$. Dann hat jeder Eigenwert die algebraische Vielfachheit = geometrische Vielfachheit = 1. Sei \vec{v}_i ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_i, i = 1, \dots, n$. Setze $\vec{b}_i = \frac{\vec{v}_i}{\|\vec{v}_i\|}$.

Dann ergibt $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ das gesuchte Hauptachsensystem für das gilt:

$$B^T A B = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \text{ und deshalb } q(\vec{x}) = q(B\vec{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Allgemeiner Fall: algebraische Vielfachheit ≥ 1

siehe Mayberg/Vachenauer 1, Satz 7.2, S.341 dort befindet sich auch ein Beweis

Beispiel 1

Quadratische Form: $q(x, y, z) = x^2 + 6xy - 2y^2 - 2yz + z^2$ bestimmt durch:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$q(x, y, z) = (x, y, z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\text{Eigenwerte: } \lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 3; \quad \lambda_3 = -4$$

$$\text{Normierte EV: } \vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{b}_3 = \vec{b}_1 \times \vec{b}_2$$

$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ ist ein Hauptachsensystem und es ist

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{-3}{\sqrt{35}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{5}{\sqrt{35}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}$$

Zur Überprüfung der Koeffizienten b_n, b_{n-1}, b_0 des charakteristischen Polynoms kann (und sollte)

$$b_n = (-1)^n$$

$$b_{n-1} = \text{Spur} A = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

$$b_0 = \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

verwendet werden. Die aus dem charakteristischen Polynom berechneten Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ können (und sollten) dann nochmals in den Formeln für die Spur und die Determinante eingesetzt werden.

Merke: $\text{Spur}(A) =$ Summe Diagonalelemente der Matrix $A =$ Summe der Eigenwerte der Matrix A (gezählt mit algebr. Vielfachheit)

(vgl. spätere Kapitel: Begriff Divergenz)

Wie schaut es aus, wenn der Grundkörper der Zahlen \mathbb{R} ist? Bisher haben wir \mathbb{C} betrachtet:

- char. Polynom hat genau n Nullstellen
- nach algebr. Vielfachheit gezählt genau n Eigenwerte

Im \mathbb{R}^n zum Teil anders: Eine Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

besitzt keine reellen EW und keine reellen EV für $\varphi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. A im komplexen aufgefasst besitzt komplexe EW und EV.

- EW: $e^{i\varphi}$ mit $EV(1, -i)^T$
- EW: $e^{-i\varphi}$ mit $EV(1, i)^T$

Beweis: Nachrechnen.

7.5.2 Quadriken

Definition 7.5.3

Als Quadrik (oder Hyperfläche zweiter Ordnung) bezeichnet man die Menge aller Punkte $P(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, die

$$p(\vec{x}) = \beta + \vec{\alpha}^T \vec{x} + \vec{x}^T A \vec{x} = 0 \text{ mit } \beta \in \mathbb{R}, \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n, A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

erfüllen.

Die Quadrik liegt in Normalform vor, wenn $\vec{x}^T A \vec{x}$ rein quadratisch ist und $\beta + \vec{\alpha}^T \vec{x}$ durch keine affine Substitution (Verschiebung) verkürzt werden kann.

7.5.3 Normalformen der Quadriken im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3

Prof. Dr. Christof Büskens

Ergänzungsblatt

Normalformen der Quadriken im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3
 (aus Meyberg/Vachenaer: Höhere Mathematik, Band 1)

Die Normalformen der Quadriken im \mathbb{R}^2 (Konstante a, b, p alle $\neq 0$)Rang $A = 2$ (Alle Eigenwerte $\neq 0$)

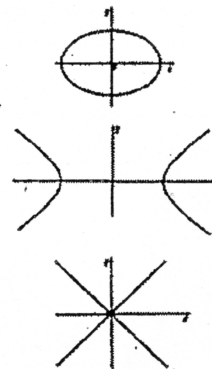
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{Ellipse (evtl. Kreis)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \quad \text{leere Menge}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{Hyperbel}$$

$$x^2 + a^2 y^2 = 0 \quad \text{Punkt}$$

$$x^2 - a^2 y^2 = 0 \quad \text{Geradenpaar mit
Schnittpunkt}$$

Rang $A = 1$ (Ein Eigenwert = 0)

$$x^2 - 2py = 0 \quad \text{Parabel}$$

$$x^2 - a^2 = 0 \quad \text{paralleles Geradenpaar}$$

$$x^2 + a^2 = 0 \quad \text{leere Menge}$$

$$x^2 = 0 \quad \text{Gerade } x = 0$$



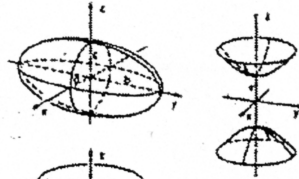
Abbildung 21: Ergänzungsblatt 1

Die Normalformen der Quadriken im \mathbb{R}_3 (Konstante a, b, c, p alle $\neq 0$)

Rang $A = 3$ (Alle Eigenwerte $\neq 0$)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

Ellipsoid (evtl. Kugel)



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

leere Menge

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

zweischaliges Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

einschaliges Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Punkt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Kegel

Rang $A = 2$ (Ein Eigenwert = 0)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0$$

elliptisches Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2pz = 0$$

hyperbolisches Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

leere Menge

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

elliptischer Zylinder

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

hyperbolischer Zylinder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Gerade

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Ebenenpaar mit Schnittgerade

Rang $A = 1$ (Zwei Eigenwerte = 0)

$$x^2 - 2py = 0$$

parabolischer Zylinder

$$x^2 - a^2 = 0$$

paralleles Ebenenpaar

$$x^2 + a^2 = 0$$

leere Menge

$$x^2 = 0$$

Ebene

Abbildung 22: Ergänzungsblatt 2

Literatur:

18. Juli 2006

62

- Leupold Band 1 S. 207-211
- Ansorge/Oberle Band 1 S. 192-195
- Meyberg/Vachenauer Band 1 S. 344-345

15.06.06

7.5.4 Berechnungsmethode für Quadrikenormalform

(wichtig für die Klasseneinteilung der Quadriken)

1. Hauptachsenfransformation des quadratischen Anteils mit Substitution $\vec{x} = B\vec{y}$ liefert ein Koordinatensystem $(0, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_2)$ die Darstellung der Quadrik:

$$\lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 + \xi_1 y_1 + \dots + \xi_n y_n + \beta = 0$$

mit gewissen $\xi \in \mathbb{R}$ (Geometrisch: Drehung des Koordinatensystems)

2. Mit der anschließenden Substitution

$$z_i = \begin{cases} y_i & \text{falls } \lambda_i = 0 \\ y_i + \frac{\xi}{2\lambda_i} & \text{falls } \lambda_i \neq 0 \end{cases} \quad \text{I}$$

werden die linearen Terme durchquadratische Ergänzung (falls möglich) wegschstituiert. (Geometrisch: Verschiebung des bereits gedrehten Koordinatensystems in einem anderen Ursprung)

Man erhält:

$$\lambda_1 Z_1^2 + \dots + \lambda_r Z_r^2 + \mu_{r+1} Z_{r+1} + \dots + \mu_m Z_m + \delta = 0 \quad \text{II}$$

wobei $\lambda_1 \neq 0, \dots, \lambda_r \neq 0$, und $\lambda_{r+1} = \lambda_n = 0$

(Nachweis: Einsetzen von I in II)

Ist etwa $\mu_k \neq 0$, so kann sogar $\delta = 0$ erreicht werden. Andernfalls wird noch einmal $\xi_k = z_k + \frac{r}{\mu_k}$ substituiert.

Beispiel

Der Typ und die Normalform des Kegelschnitts

$$q(x, y) = 2x^3 + 2xy + 3y^2 - 1 = 0$$

ergeben sich allein durch die EW von $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5}) > 0$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5}) > 0$$

\implies Ellipse.

Gedankenschritte:

$$\begin{aligned}
 B^T A B &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \\
 \implies x^T A x - 1 &= y^T B^T A B y - 1 = y^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} y - 1 = 0 \\
 \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 - 1 &= 0
 \end{aligned}$$

Wir wollen haben: $\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} - 1 = 0$. Daher wählen wir den Ansatz: $\lambda_1 = \frac{1}{a^2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{b^2}$, also

$$a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, b = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}.$$

Damit ist dann die Ellipsengleichung:

$$\frac{y_1^2}{\sqrt{1/\lambda_1}^2} + \frac{y_2^2}{\sqrt{1/\lambda_2}^2} - 1 = 0$$

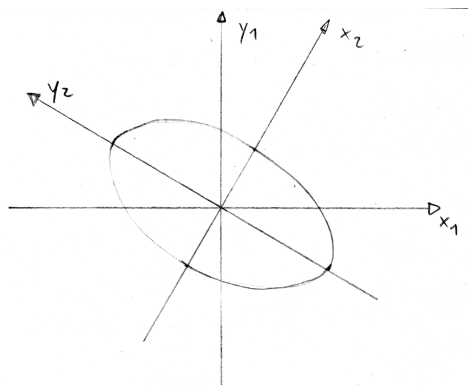


Abbildung 23: Ellipse, die Halbaschenrichtungen sind durch die EVen gegeben

Bemerkung. Sind alle EW einer symmetrischen reellen Matrix A positiv, so wird die Matrix positiv definiert genannt.

Hinweis:

Die perfekte Beherrschung (auswendig und zügig) der Rechentechnik für die Bestimmung von

- reelle und komplexe NST von Polynomen (insbesondere Lösungsformel für quadratische Polynome, Polynomdivision, systematisches Erraten von NST durch Ausprobieren von $0, \pm 1, \pm 2, \dots$)
- Lösung von regulären und singulären LGS mit Gaußalgorithmus
- Cramersche Regel für lineare 2×2 Systeme

- Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

spielt eine große Rolle in den kommenden Kapiteln (z.B. lineare Differentialgleichungen) und wird daher immer wieder abgeprüft werden.

Die Reihenfolge der Eigenvektoren ist in der Regel unwichtig. Allerdings muss diese mit der Reihenfolge der zugehörigen EV in der Transformationsmatrix B übereinstimmen. geometrischer Standpunkt:

$$\left. \begin{array}{l} -5y_1^2 + 4y_2^2 + 2y_3^2 = 1 \\ -5y_1^2 + 4y_3^2 + 2y_2^2 = 1 \end{array} \right\} \text{ sind (fast) gleich}$$

In der Tabelle der Quadriken sind nicht alle Permutationen der Achsen aufgeführt.

8 Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Literatur:

- Leupold Band 2, S. 131-159
- A/O Band 2, S.185-194
- M/V Band 2, S. 34-43

8.1 Einführendes Beispiel - lineare mechanische Schwingung

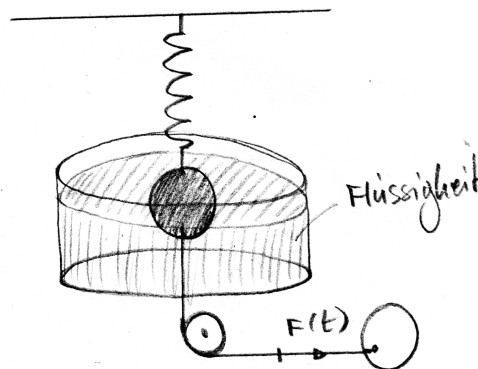


Abbildung 24: linear gedämpfter Schwinger

$F(t)$ ist Außenanregung

Vorraussetzungen:

- rückstellende Federkraft ist proportional zur Auslenkung $x = x(t)$
- Dämpfung ist proportional zur Geschwindigkeit \dot{x}

Bewegungsgleichung: $m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = F(t)$ oder $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$

$$\text{mit } 2\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{m} \geq 0, \quad \omega_0^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{m} > 0, \quad f(t) = \frac{F(t)}{m}$$

Mechanik / Elektrotechnik:

- Ungedämpfte Schwingung : $d=0$
- Freie Schwingung: $F = 0$

Definition 8.1.1

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

mit a, b Konstanten und einer gegebenen (Stör-, Steuerungs- oder Anregungs-)Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Funktion $y(x)$ ($I = \text{Intervall in } \mathbb{R}$)

(8.1) heißt homogen für $f(x) = 0$, sonst inhomogen.

16.06.06

Beispiel

$$y'' - y = 0$$

hat mind. zwei Lösungen. $y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{-x}$

$$y'' + y = 0$$

hat mind. zwei Lösungen. $y_1 = \sin(x), y_2(x) = \cos(x)$

Superpositionsprinzip

$$\left. \begin{matrix} y_1'' + ay_1' + by_1 = f_1(x) \\ y_2'' + ay_2' + by_2 = f_2(x) \end{matrix} \right\} \implies \left\{ \begin{matrix} y(x) \stackrel{\text{def.}}{=} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \\ \text{ist für alle } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ Lösungen von} \\ y'' + ay' + by = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \end{matrix} \right.$$

Zurück zum Beispiel. Wähle $f_1(x) = f_2(x) \equiv 0$.

$$y_1' + y_1 = 0 \text{ mit } y_1(x) = \sin(x)$$

$$y_2' + y_2 = 0 \text{ mit } y_2(x) = \cos(x)$$

Folgerung: $y(x) = \sin(x) + \cos(x)$ ist eine weitere Lösung von $y'' + y = 0$.

Begründung:

$$\begin{aligned} & (\sin(x) + \cos(x))'' + (\sin(x) + \cos(x)) \\ &= \sin'' x + \sin x + \cos'' x + \cos x + \cos x \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Allgemein:

$$\begin{aligned} & (y_1 + y_2)'' + (y_1 + y_2) \\ &= \underbrace{y_1'' + y_1}_{=0} + \underbrace{y_2'' + y_2}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Insbesondere zeigt das Superpositionsprinzip (8.2) für $f_1 = f_2 = 0$, dass die Lösungsmenge

$$L = \{y : I \rightarrow \mathbb{R} \mid y'' + ay' + by = 0\} \subset C^2(I)$$

der homogenen linearen DGL ein Vektorraum ist, denn es gilt

$$y_1, y_2 \in L, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \implies c_1 y_1 + c_2 y_2 \in L$$

Zwei Funktionen $y_1 : I \rightarrow \mathbb{R}, y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißen linear unabhängig auf dem Intervall I , wenn gilt

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = \underbrace{0}_{\text{Nullfunktion}} \quad \forall x \in I \implies \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Bemerkung.

$$\dim L = 2$$

Beispiel

$\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind linear unabhängig auf \mathbb{R} . Begründung:

$$\alpha_1 \sin(x) + \alpha_2 \cos(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies$$

Wenn diese Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dann auch für $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \sin(0) + \alpha_2 \cos(0) &= 0 \\ \alpha_1 \sin(\frac{\pi}{2}) + \alpha_2 \cos(\frac{\pi}{2}) &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

reguläres LGS mit Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$

8.2 Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

Ziel: Finde zunächst 2 lin. unabhängige Lösungen (Fundamentalsystem).

Teste den Exponentialansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$ mit noch unbekanntem $\lambda \in \mathbb{R}$ (bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$).

$$\implies y' = \lambda e^{\lambda x} \implies y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Einsetzen in DGL

$$\exp^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

da $\exp^{\lambda x} \neq 0 \mapsto (\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$

Man erhält das charakteristische Polynom $\chi(x)$ zur Bestimmung der Unbekannten λ :

$$\chi(\lambda) \stackrel{\text{def.}}{=} \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

1. Fall: Es gibt zwei reelle Lsg $\lambda_1 \neq \lambda_2$
 $\implies y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ sind lin. unabhängige Lsg.
2. Fall: Es gibt doppelte reelle Lgs. λ_1 , d.h. $\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2$
 $\implies y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, y_2(x) = x e^{\lambda_1 x}$ sind 2 lin. unabhängige Lsg.
3. Fall: zwei konjugiert komplexe Lösungen $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ und $\lambda_2 = \alpha - i\beta$
 $\implies y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ und $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ sind zwei linear unabhängige Lösungen.

Begründung:

$y(x) = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ist eine allgemeine komplexe Lösung.

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x))$$

$$e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) - i \sin(\beta x))$$

Wähle $c_1 = c_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$
 Wähle $-c_1 = c_2 = \frac{i}{2} \Rightarrow y = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$ } 2 reelle Lösungen

Beispiel

$$y'' = 6 - y' + 5y = 0 \Rightarrow \text{char. Polynom: } \chi(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

Lösung: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5 \Rightarrow$ 2 linear unabhängige Lösungen

$$\Rightarrow y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{5x}$$

Alle Lösungen: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{5x}$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

8.2.1 Lösung der homogenen DGL

Folgerung aus dem Superpositionsprinzip:

Wenn eine spezielle Lösung y_{spez} der inhomogenen linearen DGL bekannt ist und $y_1^{hom}(x), y_2^{hom}$ zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen linearen DGL sind, dann sind

$$y(x) = c_1 y_1^{hom}(x) + c_2 y_2^{hom}(x) + y_{spez} \quad ; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

alle Lösungen der inhomogenen DGL. Wir müssen also nur eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen DGL suchen.

Ansätze vom Typ der rechten Seite (zum Auffinden von Lsg. für die inhomogene DGL)

Für die homogene lin. DGL

$$y'' = ay' + by = f(x) = p_m(x) \cdot e^{\omega x} \quad (p_m(x) \rightarrow \text{Polynom vom Grad } m)$$

mit Polynom

$$p_m = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_m x^m$$

vom Grad m und char. Polynom

$$\chi(x) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

sieht eine spezielle Lösung so aus:

$$y_{spez}(x) = \begin{cases} \tilde{p}_m(x)e^{\omega x} & (\text{falls } \chi(\omega) \neq 0) \\ x \cdot \tilde{p}_m(x)e^{\omega x} & (\text{falls } \chi(\omega) = 0, \chi'(\omega) \neq 0) \\ x^2 \cdot \tilde{p}_m(x)e^{\omega x} & (\text{falls } \chi(\omega) = \chi'(\omega) = 0, \chi''(\omega) \neq 0) \\ \vdots & \end{cases}$$

mit einem Polynom $\tilde{p}_m(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_m x^m$ vom Höchstgrad m . Dessen unbekannte Koeffizienten β_0, \dots, β_m bestimmt man nach Einsetzen des Ansatzes in die inhomogene lin. DGL aus einem LGS (Koeffizientenvergleich).

Beachte:

- Für $\omega = 0$ ist die rechte Seite $f(x) = p_m(x)$ enthalten
- Das Polynom kann zu einer Konstanten vereinfacht werden:

$$p_m(x) = \alpha_0 \Rightarrow \tilde{p}_m(x) = \beta_0$$

Für die inhomogene lin. DGL

$$y'' + ay' + by = f(x) = p_m(x)e^{sx} \cdot \cos(rx) + q_m(x)e^{sx} \cdot \sin(rx) \quad \leftarrow \omega := s + ir$$

mit Polynomen $p_m(x)$ und $q_m(x)$ vom gemeinsamen Höchstgrad m sieht eine spezielle Lösung so aus:

$$y_{\text{spez}}(x) = \begin{cases} \tilde{p}_m(x)e^{sx} \cos(rx) + \tilde{q}_m e^{sx} \sin(rx) & (\text{für } \chi(\omega) \neq 0) \\ x [\tilde{p}_m(x)e^{sx} \cos(rx) + \tilde{q}_m e^{sx} \sin(rx)] & (\text{für } \chi(\omega) = 0, \chi'(\omega) \neq 0) \\ x^2 [\tilde{p}_m(x)e^{sx} \cos(rx) + \tilde{q}_m e^{sx} \sin(rx)] & (\text{für } \chi(\omega) = \chi'(\omega) = 0, \chi''(\omega) \neq 0) \\ \vdots & \end{cases}$$

mit zwei Polynomen $\tilde{p}_m(x)$ und $\tilde{q}_m(x)$ vom Höchstgrad m . Deren unbekannte Koeffizienten bestimmt man nach Einsetzen des Ansatzes in die inhomogene lin. DGL aus einem LGS.

Beachte:

- $s = 0 \rightarrow f(x) = p_m(x) \cos(rx) + q_m(x) \sin(rx)$
- $p_m(x) = 0, q_m \neq 0$ gilt i.A.: $\tilde{p}_m \neq 0, \tilde{q}_m \neq 0$

Bemerkung. Ist $\chi(\omega) = 0$, spricht man von Resonanz

Beispiel

$$f(x) = \cos(3x)$$

Für diese rechte Seite ist i.A. der Ansatz:

$$y_{\text{spez}}(x) = A \cos(3x) + B \sin(3x)$$

mit unbekannten Koeffizienten A und B .

22.06.06

Variation der Konstanten

Für andere Störfunktionen führt die Variation der Konstanten weiter, die immer eine Lösung liefert (siehe z.B. Meyberg/Vachenauer Band 2, S. 38).

Beispiel 1

$$y'' - 4y' + 4y = 7$$

1. Homogene lineare DGL

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

charakteristische Polynom: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$

$$\lambda_{1,2} \text{ (doppelte Nullst.)}$$

zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen linearen DGL sind:

$$y_1(x) = e^{2x} \text{ und } y_2(x) = xe^{2x}$$

Allgemeine Lösungen der homogenen linearen DGL:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} \text{ mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

2. Spezielle Lösung der inhomogenen linearen DGL

$$y'' - 4y' + 4y = 7 = 7e^{0x} = p_m(x)e^{\omega x}$$

Ansatz: $y_{spez} = k$ (= konstante = Polynom vom Grad $m=0$), weil $\omega = 0$ nicht Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

Einsetzen in die inhomogene lineare DGL liefert:

$$4k = 7 \implies k = \frac{7}{4} \implies y_{spez} = \frac{7}{4}$$

3. Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL

$$y(x) = \frac{7}{4} + C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

Beispiel 2

$$y'' + 4y = x^2 + 5 \cos(2x)$$

1. Homogene lineare DLG

$$y'' + 4y = 0$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

mit den Lösungen $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$.

$$\implies y_2(x) = \sin(2x)$$

$$y_1(x) = \cos(2x)$$

2. a) Spezielle Lösung für

$$y'' + 4y = x^2 = x^2 \underbrace{e^{0x}}_{=1} = x^2 e^{\omega x}$$

$\omega = 0$ ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Wähle deshalb den Ansatz

$$y_{spez}(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

Einsetzen in die inhomogene lin. DGL liefert

$$2\beta_2 + 4(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2) = x^2$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\beta_2 = \frac{1}{4}, \beta_1 = 0, 2\beta_2 + 4\beta_0 = 0 \implies \beta_0 = -\frac{1}{8}$$

Damit ist die spezielle Lösung dann

$$y_{spez}(x) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}x^2$$

b) Spezielle Lösung für

$$y'' + 4y = 5 \cos(2x) = p_m(x) e^{\overbrace{0}^s x} \cos(\underbrace{2}_r x) + q_m(x) e^{0x} \sin(2x)$$

mit $\omega = 0 + 2i$ ($\omega := s + ir$). Es gilt

$$p_m(x) = 5, q_m(x) \equiv 0$$

Gemeinsamer Höchstgrad der Polynome p_m und q_m ist $m = 0$. $\omega = 2i$ ist einfache Nullstelle des char. Polynoms. Benutze deshalb den Ansatz

$$y_{\text{spez}}(x) = x(\tilde{A} \cos(2x) + \tilde{B} \sin(2x))$$

Ableitung:

$$y'_{\text{spez}}(x) = (\tilde{A} \cos(2x) + \tilde{B} \sin(2x) + x(-2\tilde{A} \sin(2x) + 2\tilde{B} \cos(2x)))$$

$$y''_{\text{spez}}(x) = (-2\tilde{A} \sin(2x) + 2\tilde{B} \cos(2x)) \cdot 2 + x(-4\tilde{A} \cos(2x) - 4\tilde{B} \sin(2x))$$

Einsetzen in die inhomogene lin. DGL

$$-4\tilde{A} \sin 2x + 4\tilde{B} \cos 2x + x \overbrace{\cos 2x (-4\tilde{A} + 4\tilde{A})}^{=0} + x \sin 2x \underbrace{(-4\tilde{B} + 4\tilde{B})}_{=0} = 5 \cos 2x$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\tilde{A} = 0, 4\tilde{B} = 5 \implies y_{\text{spez}}(x) = \frac{5}{4} x \sin 2x$$

3. Mit dem Superpositionsprinzip erhält man alle Lösungen der inhomogenen lin. DGL:

$$y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} x^2 + \frac{5}{4} x \sin 2x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Zurück zum Beispiel 8.1

1. Eigenschwingung: $x'' + 2\alpha x' + \omega_0^2 x = 0$

Nullstelle des char. Polynoms $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

(a) Aperiodischer Fall: $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$ (starke Dämpfung)

Mit $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ erhält man die allgemeine homogene Lsg.

$$x_{\text{hom}}(t) = c_1 e^{\overbrace{(-\alpha + \beta)t}^{<0}} + c_2 e^{\overbrace{(-\alpha - \beta)t}^{<0}}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Für jeden Anfangszustand $x_{\text{hom}}(t_0), x'_{\text{hom}}(t_0)$, aus dem die c_1, c_2 bestimmt sind, gilt derselbe qualitative Ablauf.

Keine echte Schwingung, $x_{\text{hom}}(t)$ "kriecht" gegen Null,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_{\text{hom}}(t) = 0$$

(b) Aperiodische Grenzfall $\alpha^2 = \omega_0^2 > 0$

$$x_{hom}(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t}$$

Trotz anderer Form der Lösung, qualitativ wie in (a): keine Schwingung

a) Periodischer Fall: $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$.

Es treten Schwingungen mit der Eigenfrequenz $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ auf.

$$\begin{aligned} x_{hom} &= e^{-\alpha t}(C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t)), \text{ konst. } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\ &= e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t - \delta)C, \text{ konst. } C, \delta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die Amplitude der Schwingung wird mit $e^{-\alpha t}$ gedämpft. Für $\alpha > 0$ klingt die Bewegung für $t \rightarrow \infty$ aus.

Sonderfall: $d = 2\alpha = 0$ (keine Dämpfung)

Harmonische Schwingungen:

$$\begin{aligned} x_{hom}(t) &= C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \\ &= C \cos(\omega_0 t - \delta) \end{aligned}$$

2. Erzwungene Schwingungen: $x'' + 2\alpha x' + \omega_0^2 x = f(t)$

Die allgemeine Lösung lautet

$$x(t) = x_{hom}(t) + y_{spez}(t)$$

mit y_{spez} als spezieller Lsg. der inhomogenen lin. DGL und den möglichen Eigenschwingungen $x_{hom}(t)$ des Systems. Mit Dämpfung $\alpha > 0$ gilt immer:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_{hom}(t) = 0$$

\Rightarrow Nach Einschwingzeit gilt praktisch $x(t) \approx x_{spez}(t), t \geq t_{Einschwing.}$

Sonderfall: Harmonische Anregung $f(t) = A \cos(\omega t), \omega \neq 0$

Man erhält:

$$y_{spez}(t) = B \cos(\omega t - \phi)$$

$$\text{mit } B = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}}, \tan(\phi) = \frac{2\alpha\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Die resultierende Schwingung nach der Einschwingzeit hat die gleiche Frequenz wie die Anregungsfunktion, ist phasenverschoben und hat eine von der Anregungsfrequenz abhängige Amplitude B .

Als Verstärkungsfaktor wird definiert:

$$V(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{B}{A}$$

(Quotient aus Amplitude von $x_{spez}(t)$ und $f(t)$.)

Im Bereich $\omega \approx \omega_0$ spricht man von Resonanz. Ist die Dämpfung α sehr klein, liegt die Resonanzfrequenz ω_0 nahe der Eigenfrequenz ω_1 von $x_{hom}(t)$.

Führt ein Amplitudenwachsen zu Schäden im System (Einsturz von Brücken) so spricht man von Resonanzkatastrophen.

8.3 Anfangs und Randbedingungen

Die allgemeine Lösung enthält noch zwei beliebige Freiheitsgrade C_1 und C_2 . In technischen Prozessen sind meistens Anfangsbedingungen an einer Stelle $x = x_0$ festgelegt.

$$\begin{cases} y(x_0) = k_1 & \text{Funktionswert} \\ y'(x_0) = k_2 & \text{Steigung} \end{cases}$$

Dies führt auf ein reguläres LGS für C_1 und C_2 mit genau einer Lösung des Anfangswertproblems. Gelegentlich liegen Randbedingungen der Form

$$\begin{cases} y(x_0) = k_1 \\ y'(x_0) = k_2 \end{cases}$$

vor, mit Anfangspunkt x_0 und Endpunkt x_g . Solche linearen Restwertprobleme können keine oder genau eine unendlich viele Lösungen besitzen.

23.06.06

8.3.1 Ausblick: Lineare DGL höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Lösungsmethoden und Lösungsideen funktionieren auch bei linearen DGL höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

$$y^n(x) + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = f(x)$$

Beispiel

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6 = 0$$

Der Exponentialansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ führt auf das charakteristische Polynom.

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

mit Nullstellen $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ Die allgemeine Lösung dieser homogenen linearen DGL 3ter Ordnung

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$$

Beispiel 2

$$2y''' - 5y'' + 6y' - 2y = 4$$

Zunächst wird die homogene lineare DGL gelöst. Ansatz:

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

$$\implies \text{char. Polynom: } 2\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda - 2 = 0$$

mit Nullstellen

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = 1 + i, \lambda_3 = 1 - i$$

Die allgemeine reelle Lösung der homogenen lin. DGL ist

$$y_{hom}(x) = c_1 e^{x/2} + c_2 e^x \sin x + c_3 e^x \cos x$$

Durch Raten oder Ansatz vom Typ der rechten Seite bestimmt man eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen DGL.

$$y_{spez}(x) = -2$$

Man erhält als allgemein reelle Lösung der inhomogenen linearen DGL:

$$y(x) = c_1 e^{x/2} + c_2 e^x \sin x + c_3 e^x \cos x - 2$$

Beispiel 3

Anfangswertproblem

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 5y'' - 4y' + 4y = 0$$

mit 4 Anfangsbedingungen $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y'''(0) = -1$

Der Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ führt auf das charakteristische Polynom

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

mit Nullstellen $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ (doppelt), $\lambda_3 = i, \lambda_4 = -i$

Allgemeine reelle Lösung der homogenen, lin. DGL 4ter Ordnung ist

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

Einsetzen der allgemeinen Lösung in die 4 Anfangsbedingungen liefert ein reguläres lineares Gleichungssystem für die 4 Konstanten c_1, c_2, c_3, c_4 mit der eindeutigen Lösung $c_4 = 1; c_1 = c_2 = c_3 = 0$

Nullstellen des char. Polynoms können jetzt auch dreifach oder vierfach usw. sein. Dann fehlen uns bis jetzt noch genügend lin. unabhängige Lösungen der homogenen lin. DGL. Bei mehrfachen (genauer: m_j -fachen) reellen Nullstellen λ_j des char. Polynoms

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

$$\text{sind } y_1(x) = e^{\lambda_j x}, y_2(x) = x e^{\lambda_j x}, y_3(x) = x^2 e^{\lambda_j x}, \dots, y_{m_j} = x^{m_j-1} e^{\lambda_j x}$$

linear unabhängige Lösungen der homogenen lin. DGL. Analog bei mehrfachen komplexen Nullstellen

Beispiel

Die lineare DGL:

$$y^{(4)} - 8y^{(3)} + 42y'' - 104y' + 169y = 0$$

charakteristisches Polynom: $\lambda^4 - 8\lambda^3 + 42\lambda^2 - 104\lambda + 169 = 0$ mit Nullstellen: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2 + 3i$ und $\lambda_3 = \lambda_4 = 2 - 3i$.

Die allgemeine reelle Lsg ist:

$$y(x) = c_1 e^{2x} \sin(3x) + c_2 e^{2x} \cos(3x) + c_3 x e^{2x} \sin(3x) + c_4 x e^{2x} \cos(3x)$$

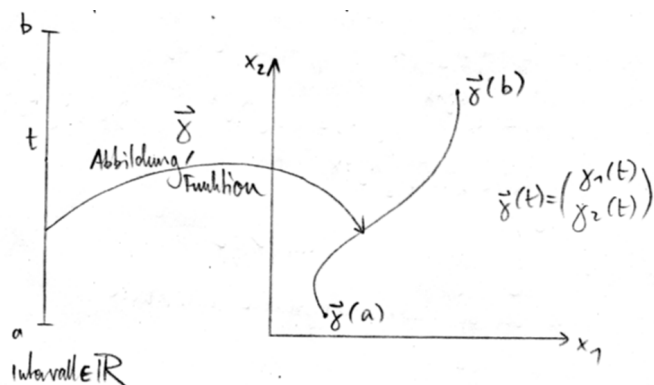
Dies wird später bei der Lsg von Eigenwertproblemen gewöhnlicher DGL behandelt.

9 Differentiation von Funktionen in mehreren Variablen

9.1 Kurven und Bogenlängen

Literatur:

- Ansorge/Obele, Bd.1, S.376ff.
- Meyberg/Vachenauer, Bd.1, S. 360-370, S. 196-197
- Leypold, Bd.1, S.495-497/Bd.2, Kap. 11.1-11.2



Definition 9.1.1

Eine C^1 -Funktion

$$\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$$

heißt C^1 -parameterdarstellung γ einer Kurve c . Die Kurve c heißt dann kurz C^1 -Kurve. Unter der Kurve c oder genauer der Spur der Kurve c versteht man die "Punktmenge"

$$c = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = \gamma_1(t), \dots, x_n = \gamma_n(t); t \in [a, b] \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

$\vec{\gamma}(a)$ heißt der Anfangspunkt der Kurve c . $\vec{\gamma}(b)$ heißt Endpunkt der Kurve c . Eine Kurve c heißt geschlossen, falls $\vec{\gamma}(a) = \vec{\gamma}(b)$.

Definition 9.1.2

$$\frac{d}{dt} \vec{\gamma}(t) = \dot{\vec{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(t) \end{pmatrix}$$

heißt Tangentenvektor und ist der Grenzwektor der (in der Länge angepassten) Sekantenvektoren.

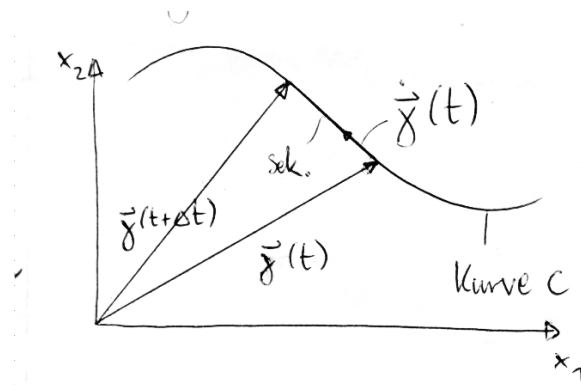


Abbildung 25: schönes Bild

$$\dot{\vec{\gamma}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot (\vec{\gamma}(t + \Delta t) - \vec{\gamma}(t))$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\dot{\vec{\gamma}}(t)}{|\dot{\vec{\gamma}}(t)|} \quad \underline{\text{Einheitstangentenvektor}}$$

Definition 9.1.3

Ein Kurvenpunkt $\vec{\gamma}(t)$ heißt regulär, wenn

$$\dot{\vec{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(t) \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$

Ein Kurvenpunkt $\vec{\gamma}(t)$ heißt singulär, wenn

$$\dot{\vec{\gamma}}(t) = \vec{0}.$$

Die Parameterdarstellung einer ebenen Kurve wird oft geschrieben als

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Die Parameterdarstellung einer Raumkurve wird oft geschrieben als

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Beispiel 1: Kreis

Parameterdarstellung:

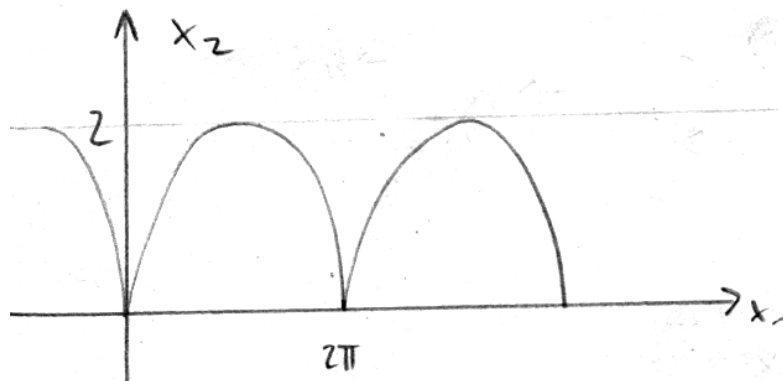
$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, t \in [\pi, 3\pi]$$

beschreibt einen Kreis c in \mathbb{R}^2 (Mittelpunkt= Ursprung Radius = 1)

Beispiel 2

Auch $\tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} \cos(\tau^2) \\ \sin(\tau^2) \end{pmatrix}, \tau \in \sqrt{\pi}, \sqrt{3\pi}$

beschreibt den selben Kreis c .



Beispiel 3: Zyklode

Die Parameterdarstellung $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} rt - a \sin(t) \\ r - c \cos(t) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, (r, a = \text{const.})$ beschreibt eine Zyklode.

Wegen $\dot{\vec{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} r - a \cos t \\ a \sin(t) \end{pmatrix}$ hat die Kurve für $a=r$ an den Stellen $t = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ singuläre Punkte.

Man erkennt an diesem Beispiel bereits, dass an singulären Punkten geometrische Besonderheiten der Kurve c auftreten können.

Man erkennt an diesem Beispiel bereits, dass an singulären Punkten geometrische Besonderheiten der Kurve c passieren können.

Beispiel 4: Schraubenlinie

Die Kurve c , die durch die Parametrisierung

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(2\pi t) \\ r \sin(2\pi t) \\ ht \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

gegeben ist, ist eine Schraubenlinie mit Radius $r > 0$ und Ganghöhe $h \neq 0$.

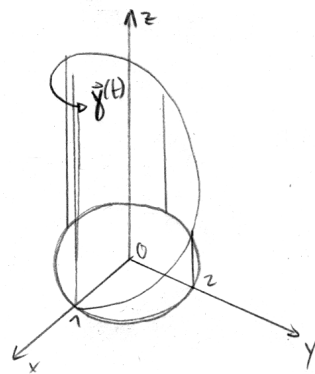


Abbildung 26: Schraubenlinie

29.06.06

Definition 9.1.4 zulässiger C^1 -Parameterwechsel

Ist $\vec{\gamma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 Parameterdarstellung eine Kurve c und $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine stetig differenzierbare bijektive und streng monoton wachsende Abbildung (d.h. $h \in C^1$ mit $h'(\tau) > 0$ für $\tau \in [\alpha, \beta]$), so beschreibt die "neue" C^1 -Parameterdarstellung $\vec{\gamma}(\tau) = \vec{\gamma}(h(\tau))$, $\alpha \leq \tau \leq \beta$ die gleiche Kurve c (gleiche Gestalt, gleicher Durchlaufsinne, veränderte Durchlaufgeschwindigkeit)

Bzgl. beider Parameterisierungen hat die Kurve c die gleichen singulären Punkte, wegen $h'(\tau) \neq 0$

Ein (nicht zulässiger) Parameterwechsel mit $h'(\tau_0) = 0$, hätte einen regulären Punkt $\vec{\gamma}(t_0)$, $t_0 = h(\tau_0)$ zur Konsequenz, dass der Kurvenpunkt in der neuen Parameterisierung ein singulärer Punkt wäre.

Beispiel 6

Eine stetige Funktion $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ lässt sich als Kurve c auffassen.

1. Parametrisierung: $\vec{\gamma}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$, $a \leq x \leq b$
2. Parametrisierung: $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} a+t(b-a) \\ f(a+t(b-a)) \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$

Beispiel 6

Beim Kreis c von Beispiel 1 und 2

$$t = h(\tau) = \tau^2 \quad \text{mit } h'(\tau) = 2\tau > 0, \tau \in [\sqrt{\pi}, \sqrt{3\pi}]$$

Bogenlänge einer Kurve

Gegeben: C^1 Kurve c mit C^1 Parameterdarstellung $\vec{\gamma}(t)$, $t \in [a, b]$

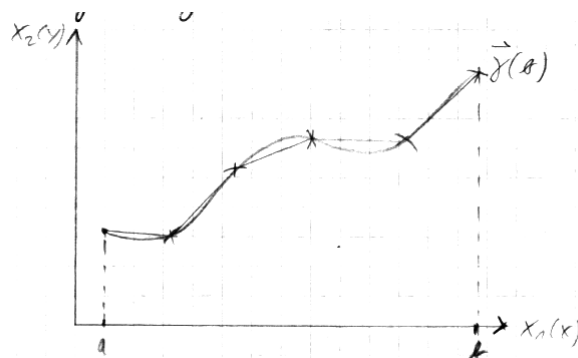


Abbildung 27: Bogenlänge einer Kurve

Zur Bestimmung der Bogenlänge s der C^1 Kurve c wird diese durch einen Polygonzug approximiert. Zerlegung Z_m des Intervalls $[a, b]$, besteht aus $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$.

$$t_{j+1} - t_j = \Delta t = \frac{b - a}{m} = \text{Konstante} > 0$$

$$\begin{aligned} L(Z_m) &= \sum_{j=0}^{m-1} \|\vec{\gamma}(t_{j+1}) - \vec{\gamma}(t_j)\| \\ \stackrel{\text{ebene Kurve}}{=} & \sum_{j=0}^{m-1} \left\| \begin{pmatrix} x(t_{j+1}) \\ y(t_{j+1}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t_j) \\ y(t_j) \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{[x(t_{j+1}) - x(t_j)]^2 + [y(t_{j+1}) - y(t_j)]^2} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{\left[\frac{x(t_{j+1}) - x(t_j)}{\Delta t} \right]^2 + \left[\frac{y(t_{j+1}) - y(t_j)}{\Delta t} \right]^2} \cdot \Delta t \\ &\stackrel{\text{MWS}}{=} \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{[\dot{x}(\bar{\tau})]^2 + [\dot{y}(\bar{\tau})]^2} \cdot \Delta t \\ \Delta t \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty) &\implies \int_a^b \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2} \cdot dt = s \end{aligned}$$

Für räumliche Kurven c mit C^1 - Parameterdarstellung

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, t \in [a, b]$$

berechnet sich die Bogenlänge durch

$$s = \int_a^b \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 + [\dot{z}(t)]^2} dt$$

Beispiel

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(t) &= \begin{pmatrix} r(t - \sin t) \\ r(1 - \cos t) \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi] \\ \dot{\vec{\gamma}}(t) &= \begin{pmatrix} r(1 - \cos t) \\ r \sin t \end{pmatrix} \\ \|\dot{\vec{\gamma}}(t)\| &= r\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2r \sin \frac{t}{2} \\ s &= \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt \cdot 2r = 8r \end{aligned}$$

Bemerkung. Die Bogenlänge s einer C^1 -Kurve c ist parameterisierungsinvariant

Beweis. Sei $\vec{\gamma}(\tau) = \vec{\gamma}(h(\tau)) = \vec{\gamma}(t)$ mit $t = h(\tau)$. h sei zulässiger C^1 -Parameterwechsel, d.h.

$$h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b], h'(\tau) > 0$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S(\vec{\gamma}) &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\| \frac{d}{d\tau} \vec{\gamma}(\tau) \right\| d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \left\| \frac{d\vec{\gamma}}{dt}(h(\tau)) \cdot h'(\tau) \right\| d\tau \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\| \dot{\vec{\gamma}}(h(\tau)) \right\| h'(\tau) d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \left\| \dot{\vec{\gamma}}(t) \right\| dt \\ &= S(\vec{\gamma}) \end{aligned}$$

□

Definition 9.1.5

$\vec{\gamma} : [a, b] \Rightarrow \mathbb{R}^n$ sei C^1 -Kurve c . Die Funktion

$$s(t) = \int_a^t \|\dot{\vec{\gamma}}(\tilde{t})\| d\tilde{t}$$

heißt Bogenlängenfunktion von c .

Sei c eine reguläre C^1 -Kurve, so ist die Abbildung $S : [a, b] \Rightarrow [0, S(b)]$ ein zulässiger Parameterwechsel.

Begründung: $S'(t) = \|\dot{\vec{\gamma}}(t)\| \stackrel{\text{nach Vorr.}}{>} 0$

Insbesondere existiert die Umkehrabbildung S^{-1} und dies ist auch ein zulässiger Parameterwechsel $S^{-1} : [0, S(b)] \Rightarrow [a, b] \implies t = S^{-1}(s)$

Definition 9.1.6

Die Parametrisierung der regulären C^1 -Kurve

$$\vec{\gamma}(s) = \vec{\gamma}(S^{-1}(s)), \quad 0 \leq s \leq S(b)$$

heißt die Parametrisierung nach der Bogenlänge.

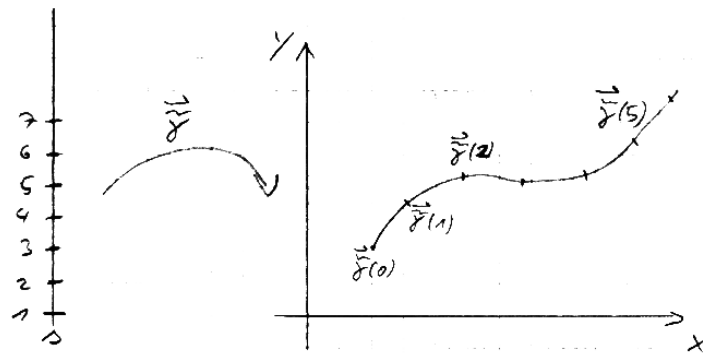


Abbildung 28: Bogenlängenparametrisierung (Durchlauf mit gleicher Geschw., bezogen auf durchlaufene Strecke der Kurve)

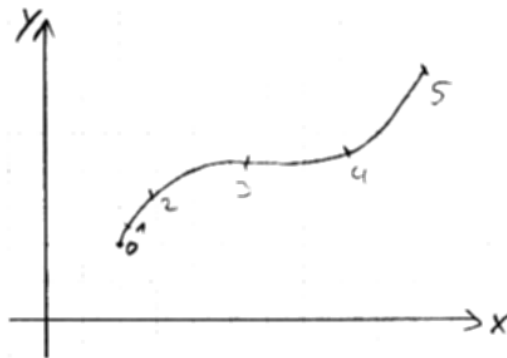


Abbildung 29: beliebige Parametrisierung (Durchlauf mit wechselnder Geschwindigkeit)

Bezeichnung Die Ableitung bzgl. der Bogenlänge s wird mit $'$ statt mit $\dot{}$ bezeichnet.

Bemerkung. 1. Für die Parametrisierung nach der Bogenlänge gilt:

$$\vec{\gamma}'(s) = S^{-1\dot{}}(s) \frac{1}{\|\dot{\text{cot}} \text{vec} \gamma(S^{-1}(s))\|}$$

D.h. $\|\vec{\gamma}'(s)\| = 1$, Vektor der Länge 1. Die Parametrisierung ist derart, dass die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit 1 (dem Betrag nach) durchlaufen wird.

2.

$$\|\vec{\gamma}'(s)\| = 1, \implies \vec{\gamma}'(s)$$

ist Einheitstangentenvektor der Kurve c .

$$\|\vec{\gamma}'(s)\|^2 = \langle \vec{\gamma}'(s), \vec{\gamma}'(s) \rangle = \vec{\gamma}'(s)^T \vec{\gamma}'(s) = 1$$

Differenzieren nach s liefert:

$$2 \langle \vec{\gamma}'(s), \vec{\gamma}''(s) \rangle = 0 \implies \vec{\gamma}'(s) \perp \vec{\gamma}''(s)$$

D.h. der bezüglich der Bogenlänge s berechnete Beschleunigungsvektor $\vec{\gamma}''(s)$ steht senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{\gamma}'(s)$.

$$\vec{n}(s) = \frac{\vec{\gamma}''(s)}{\|\vec{\gamma}''(s)\|}$$

heißt Hauptnormaleneinheitsvektor. $\hat{\kappa}(s) = \|\vec{\gamma}''(s)\|$ heißt Krümmung der Kurve c .

Für eine räumliche Kurve $c \subset \mathbb{R}^3$ heißt

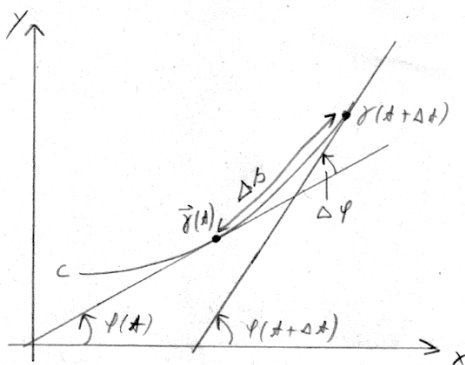
$$\vec{B}(s) = \vec{\gamma}'(s) \times \vec{n}(s)$$

Binormaleneinheitsvektor. $\{\vec{\gamma}'(s), \vec{n}(s), \vec{B}(s)\}$ bilden ein Orthonormalsystem (ONS), das begleitende Dreibein.

30.06.06

- c) Wenn die Kurve c nicht bzgl. der Bogenlänge s parametrisiert ist, ist die obige Berechnungsvorschrift für die Krümmung unpraktisch.

Daher wird eine weitere Definition der Krümmung für $n = 2$ (ebene Kurve) eingeführt:



Die durchschnittliche Krümmung über dem Parameterintervall $[t, t + \Delta t]$ ist die Änderung $\Delta \varphi$ der Tangentenrichtung, bezogen auf die Änderung der Bogenlänge

$$\kappa(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi(t)}{\Delta s(t)} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{s}(t)}$$

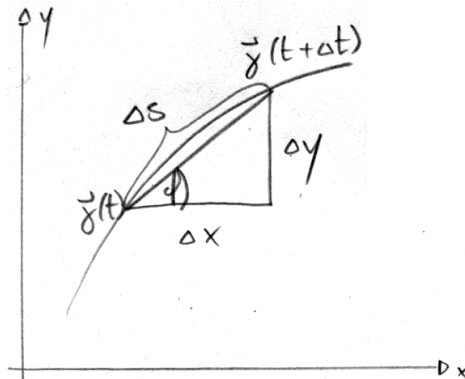
$\kappa(t)$ heißt Krümmung der ebenen Kurve c im Punkt

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Nun gilt

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[\dot{x}(\hat{t})]^2 + [\dot{y}(\hat{t})]^2} d\hat{t}$$

$$\Rightarrow \dot{s}(t) = \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2}$$



Ferner gilt:

$$\sin \varphi(t) = \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2}}$$

$$\cos \varphi(t) = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2}}$$

Ergänzung: Falls eine ebene Kurve durch die Darstellung $y = f(x)$ gegeben ist, dann bestimmt sich ihre Bogenlänge mit der Standardparametrisierung $\vec{\gamma}(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ zu

$$s = \int_{x=a}^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

und ihre Krümmung zu

$$\hat{\kappa} = \frac{(f'')^2}{[1 + (f')^2]^{3/2}}$$

9.2 Funktionen in mehreren Variablen

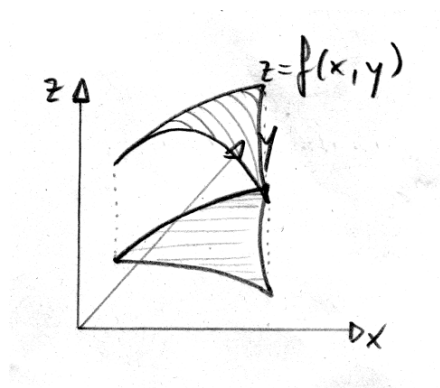


Abbildung 30: z.B. Höhe des Geländes im Fichtelgebirge

Beispiel 1

x, y : Längen- und Breitengrad
 z : Höhe

Man erhält eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ Definitionsbereich.

Beispiel 2

Sie geben für jeden Punkt im Zimmer mit einer Kerze mit den Koordinaten (x_1, x_2, x_3) den Vektor der Zustände (Temperatur, Luftdichte) an.

$$f : \mathbb{R}^3 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

Urbildraum \mathbb{R}^3 Bildraum \mathbb{R}^2

Daraus folgt:

$$\tan \phi(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

Daraus folgt mit Differenzieren:

$$\frac{1}{\cos^2 \phi(t)} \dot{\phi}(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2}$$

$$\xrightarrow{\text{cos } \phi \text{ einsetzen}} \dot{\phi} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2 \dot{y}^2}$$

Zusammen

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{([\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Zusammenhang mit der früheren Def. der Krümmung $\hat{\kappa}$. Es gilt:

$$|\kappa(t)| = \hat{\kappa}(s) \text{ mit } s = s(t) \text{ oder } t = s^{-1}(s)$$

1. $n > 1, m = 1$, wie in Bsp. 1, Skalarfeld (Ladungsdichte)
2. $n = 1, m > 1$

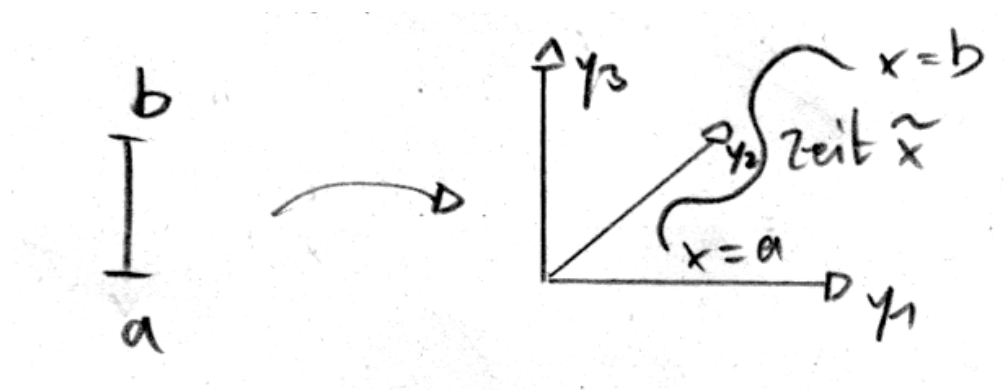


Abbildung 31: Bewegung eines Messpunktes

$$f : \begin{cases} \overbrace{[a, b]}^{\subseteq \mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^m \\ x \mapsto \begin{pmatrix} \rho_1(x) \\ \vdots \\ \rho_m(x) \end{pmatrix} \end{cases}$$

ρ heißt Weg in \mathbb{R}^m (Parameterdarstellung einer Kurve)

3. $n = m > 1$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \rho_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \rho_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

ρ heißt Vektorfeld.

Beispiel Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Lineare Abbildung vom \mathbb{R}^3 in den \mathbb{R}^2

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{f}(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + x_3 \end{pmatrix} \text{ allg: } \vec{f}: \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Eine Funktion (Abbildung/Transformation) von $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in den \mathbb{R}^m ist eine Vorschrift, die jeden Punkt $\vec{x} \in D$ genau einen Punkt $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ zuordnet.

Ausführliche Schreibweise:

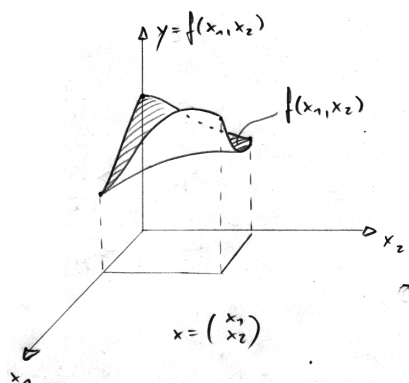
$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \text{ oder } \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$f_j : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt j-te Komponentenfunktion von f.

9.3 Bsp: Graphische Veranschaulichung

zu a) $n = 2, m = 1 : (D \subseteq \mathbb{R}^2)$

$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x)$

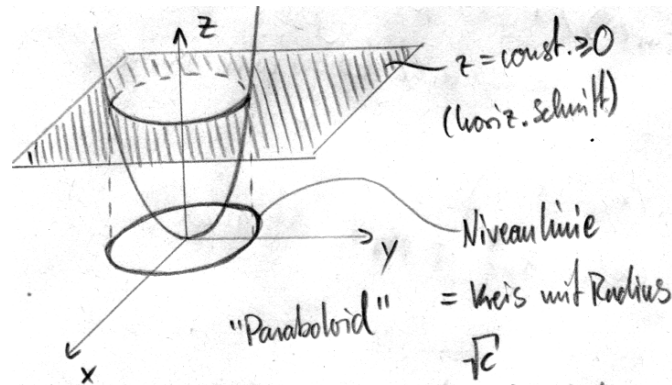


Der Graph von f ist ein "Gebirge" über dem ebenen Bereich D

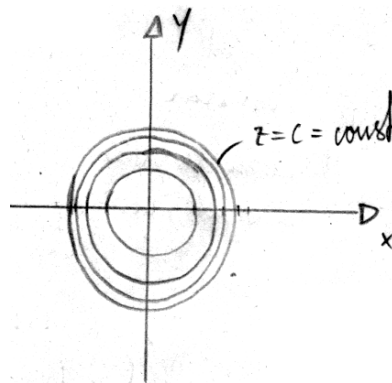
$$\text{graph } f = \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in D\}$$

Beispiel

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$



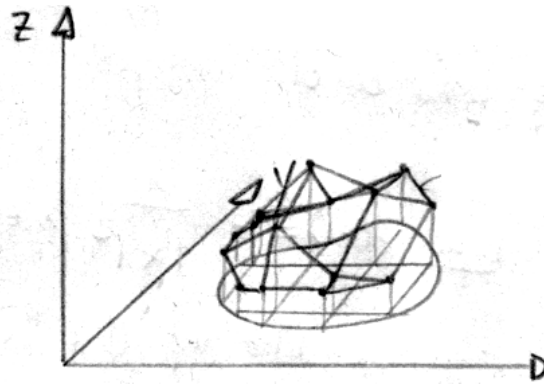
Nivaulinie = Kreis mit Radius \sqrt{c} (Projektion der Horizontalen Schnitte)



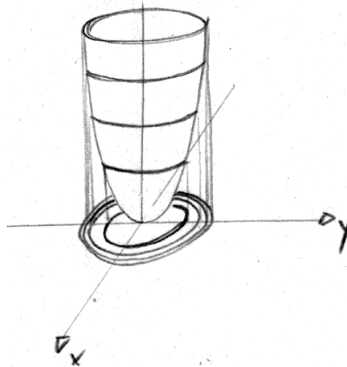
Bemerkung. • Graph $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$ ist Fläche im \mathbb{R}^{n+1} Anschaulich nur für $n=2$.

Alternativ: Farbe als zusätzliche Dimension

- Visualisierung mit Hilfe "regulärer" Gitter

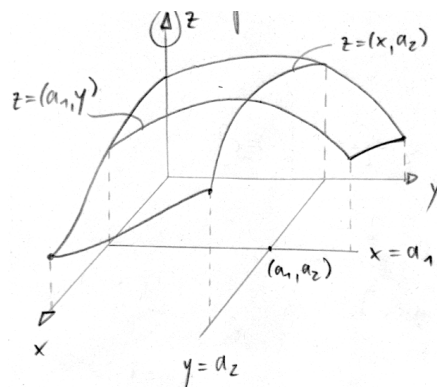


Vertikale Schnitte n Ebenen mit graph f.



Falls geeignet: Vertikale Schnitte von Ebenen und Zylindern mit graph f

- Visualisierung mit partiellen Funktionen.



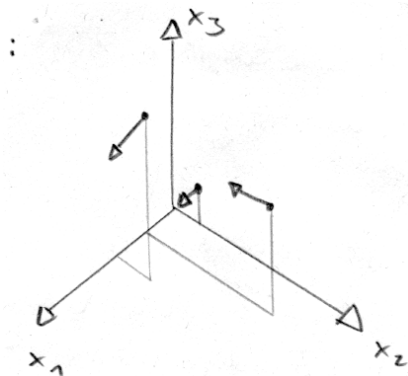
Vgl oben:

Bilder der Gitter sind Graphen partieller Funktionen.

zu b) siehe 9.1: Kurven im \mathbb{R}^n

zu c) $n = m = 3$: $(D \subseteq \mathbb{R}^3) f : D \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto f(x)$

f kann z.B. ein Gravitations- oder elektromagnetisches Kraftfeld darstellen



Beispiel

$$f(x) = -\frac{x}{|x|^3}, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

ist gerichtet auf $0 \in \mathbb{R}^3$

06.07.06

9.4 Veranschaulichung reeller Funktionen in mehreren Variablen

Bilder von Flächen $z = f(x, y)$ im \mathbb{R}^3 (dreidimensionaler Anschauungsraum) und zugehörige Landkarte mit Höhenlinien $z = \text{konst.}$

9.5 Reellwertige Funktionen in mehreren Variablen

$$f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

Skalarfeld mit $n > 1, m = 1$. Falls $m > 1$, d.h.

$$f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \vec{f}(\vec{x})$$

in natürlicher Weise einbezogen werden kann wird (nach Hinweise) auch $m > 1$ zugelassen (Was soll das heißen?).

Parabole

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Die Niveaulinien sind Parabeln
 $x = cy^2 \Rightarrow f = \frac{c}{c^2 + 1}, c \geq 0.$

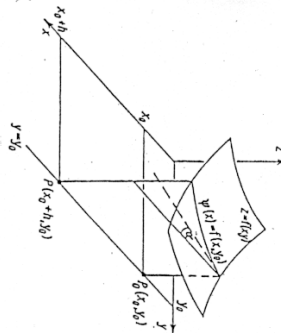
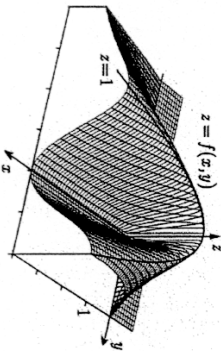
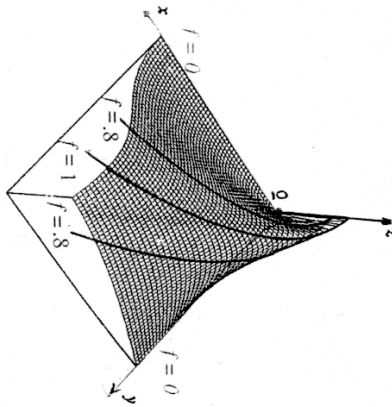
Die Funktion ist auf den Koordinatenachsen identisch Null, daher ist sie in $(0, 0)$ partiell differenzierbar:

$$f_x(0, 0) = 0, \quad f_y(0, 0) = 0.$$

Sie ist auch stetig längs jeder Geraden $y = mx$ durch $(0, 0)$:

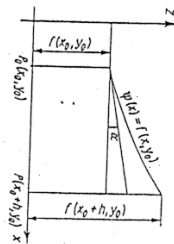
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = 0$$

Trotzdem ist die Funktion in $(0, 0)$ nicht stetig und nicht total differenzierbar



Partielle Ableitung (hier in x-Richtung)

Beiblatt



Totale Ableitung und Tangentialebene

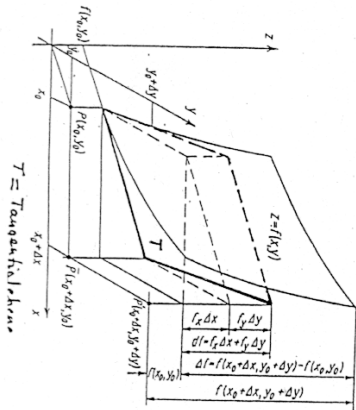


Abbildung 32: Beiblatt

9.6 Grenzwerte und Stetigkeit

Eine Folge von Vektoren $\vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} N &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ k &\mapsto \vec{a}_k \end{aligned}$$

Bezeichnung: $(\vec{a}_k)_{k \in \mathbb{N}}$, mit den Komponenten

$$\vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_1^{(k)} \\ \vdots \\ a_m^{(k)} \end{pmatrix}, k \in \mathbb{N}$$

Erst nach x_i , dann nach x_k differenzieren

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \right) = \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x_i^2} = f_{x_i, x_i}$$

Definition 9.6.1

Eine Folge $(\vec{a}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^n ist konvergent gegen $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, wenn gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\vec{a}_k - \vec{a}| = 0 \text{ mit } |\vec{a}_k - \vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i^{(k)} - a_i|^2}$$

Schreibweise: $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{a}_k = \vec{a}$ oder $\vec{a}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \vec{a}$

Folglich: $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{a}_k = \vec{a} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_i^{(k)} = a_i, (i = 1, \dots, n)$

Definition 9.6.2

(Hier $m \geq 1$). Es sei $D \subset \mathbb{R}^n, \vec{a} \in D$ und

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n \supseteq D &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \vec{f}(\vec{x}) \end{aligned}$$

Die Formel

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{c}$$

bedeutet: Für jede Folge $(\vec{a}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{a}_k = \vec{a}$ ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{f}(\vec{a}_k) = \vec{c}.$$

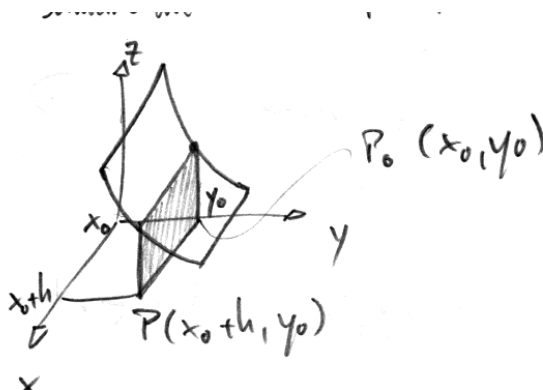
Man beachte

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_i(\vec{x}) = c_i, \forall i = 1, \dots, m$$

Definition 9.6.3

Stetigkeit von $f: \mathbb{R}^n \subseteq D \Rightarrow \mathbb{R}^m (m \geq 1)$. Die Funktion $f: \mathbb{R}^n \subseteq D \Rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt stetig im Punkt $\vec{a} \in D$ wenn $\lim_{\substack{\vec{x} \rightarrow \vec{a} \\ \vec{x} \in D}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$

f heißt stetig (auf D), wenn f in jedem Punkt von D stetig ist.



Unpräzise gesprochen

$f(x, y)$ ist stetig \iff Der Graph $(x, y, f(x, y))$ im \mathbb{R}^3 weist keine Sprünge auf.

Bemerkung. Definition gilt auch für $n=m=1$!

Beispiel

Alle Polynome in n Variablen sind stetig

z.B. $f(x, y) = x^3 + 5xy^2 + y^7$

Wie in einer Dimension gilt:

Satz 9.6.4

$f: \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig auf D . D sei beschränkt und abgeschlossen. Dann besitzt $f(\vec{x})$ auf D einen (globalen) Maximalwert M und einen (globalen) Minimalwert m , d.h. $\exists \vec{x}_1 \in D, \vec{x}_2 \in D$ mit

$$m = f(\vec{x}_1) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_2) = M, \forall \vec{x} \in D$$

Beispiel

Gegeben sei eine stetige Funktion $f(\vec{x}) = x^2 + y^2$ besitzt auf $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ (beschränkt und abgeschlossen)

- das globale Minimum bei $(0, 0) \in D$ mit $f(0, 0) = 0$
- das globale Maximum bei $(2, 2) \in D$ mit $f(2, 2) = 8$.

Beispiel einer unstetigen Funktion: Parabelfalle

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Die Höhenlinien sind Parabeln: Sei $x = py^2$.

$$\implies f(py^2, y) = \frac{2py^4}{(p^2 + 1)y^4} = \frac{2p}{p^2 + 1} = \text{konst} \in]0, 1[$$

wegen $x > 0 \implies p > 0$.

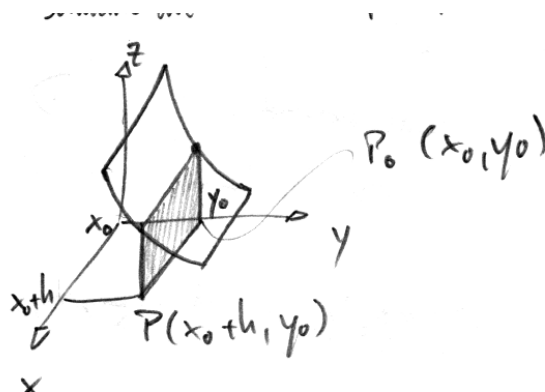
9.6.1 Partielle Ableitungen

Es sei $f : \mathbb{R}^n \subseteq D \rightarrow \mathbb{R}$, D offen. Sei zunächst $n = 2$ und die Fläche $z = f(x, y)$ gegeben.
Fragen:

1. Wie ändert sich der Funktionswert $f(x, y)$, Wenn man x ändert und y festhält?
2. Wie ändert sich der Funktionswert $f(x, y)$, Wenn man y ändert und x festhält?
3. Wie ändert sich der Funktionswert $f(x, y)$, Wenn man x und y ändert?

Antwort zu (1):

Schneide die Fläche $z = f(x, y)$ mit der Ebene $y = y_0 = \text{konst.}$



In der Ebene $y = y_0$ entsteht eine (Schnitt-)Kurve $z = f(x, y_0) = \psi(x)$. Steigung dieser Kurve in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$ ist dann

$$\psi'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(x_0+h) - \psi(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} =: \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$$

Die Größe $f_x(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$ gibt die Steigung in x -Richtung an.

Antwort zu (2): (Analog zu (1) (x, y vertauschen))

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$$

Die Größe $f_y(x_0, y_0)$ gibt die Steigung in y -Richtung an.

Antwort zu (3): (später in Kapitel 9.5.3)

Definition 9.6.5

Die Funktion $f(x, y)$ sei in einer Umgebung von (x_0, y_0) definiert. Bei festgehaltenen $y = y_0$ sei $\psi(x) = f(x, y_0)$ in gewöhnlichem Sinne an der Stelle $x = x_0$ differenzierbar.

Dann heißt

$$\psi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$$

die partielle Ableitung der Funktion $f(x, y)$ nach x an der Stelle (x_0, y_0) .

In analoger Weise wird (x festhalten, y variieren)

$$\Phi'(y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$$

die partielle Ableitung der Funktion $f(x, y)$ nach y an der Stelle (x_0, y_0) genannt.

Bemerkung. Für $f(x_1, \dots, x_n)$ ist also $\frac{\partial}{\partial x_k}$ die gewöhnliche Ableitung bzgl. der Variablen x_k , wobei die übrigen $n - 1$ Variablen $x_j (j \neq k)$ als Konstante angesehen werden.

Beispiel

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^3 + xy^2 + y^4 \\ \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) &= 3x^2 + y^2 + 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) &= 0 + 2xy + 4y^3 \end{aligned}$$

Bemerkung. Ist $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, dann ist jede partielle Ableitung f_x wieder eine Funktion $D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_x : \mathbb{R}^n \supseteq D &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\mapsto f_{x_i}(\vec{x}) \end{aligned}$$

Die Funktion kann wieder partiell diff'bar sein. f heißt zweimal diff'bar, wenn alle zweiten Ableitungen existieren.

Bezeichnungen: Für $i, k \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_k \partial x_i} = f_{x_i x_k}$$

07.07.06

Definition 9.6.6

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbaren Funktion wird mit $C^k(D)$ bezeichnet.

$$C^k(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } k \text{ mal stetig differenzierbar}\}$$

$$C^0(D) = \{f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$$

Bemerkung. $C^\infty \subset C^2 \subset C^1 \subset C^0$

Beispiel 2

Lineare Approximation der C^1 Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1+x_2} + x_3 \cos(x_2) + x_1$ im Punkt

$$\vec{x}_0^T = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}) = (0, 0, 0)$$

Zunächst: $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, Formeln daher analog erweitern.

Tangentiale(hyper)ebene

$$z = f(\vec{x}_0 + f_{x_1}(\vec{x}_0)(x_1 - x_{1,0}) + f_{x_2}(\vec{x}_0)(x_2 - x_{2,0}) + f_{x_3}(\vec{x}_0)(x_3 - x_{3,0}))$$

Hier:

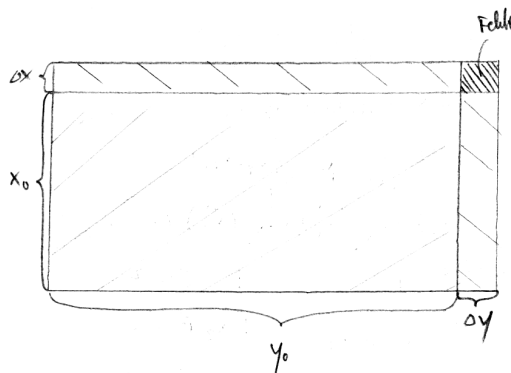
$$\begin{aligned} f_{x_1} &= e^{x_1+2x_2} + 1, f_{x_1}(\vec{0}) = 2 \\ f_{x_2} &= e^{x_1+2x_2} - x_3 \sin(x_2), f_{x_2}(\vec{0}) = 2 \\ f_{x_3} &= \cos(x_2), f_{x_3}(\vec{0}) = 1 \\ &f(\vec{0}) = 1 \end{aligned}$$

Tangentiale(hyper)ebene: $z = 1 + 2x_1 + 2x_2 + x_3 \approx f(x_1, x_2, x_3)$ bei $\vec{x} \approx (0, 0, 0)$

Wie gut ist die Approximation einer Funktion durch die Tangentialebene?

Beispiel

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x \cdot y \\ f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &\approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \underbrace{\Delta x}_{(x-x_0)} + f_y(x_0, y_0) \underbrace{\Delta y}_{(y-y_0)} \\ (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y) &\approx x_0 \cdot y_0 + y_0 \Delta x + x_0 \Delta y \end{aligned}$$



Später: Taylorapproximationen beschreiben den allgemeinen Fall

Erinnerung: $f : \mathbb{R} \supset [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in [a, b]$

$$\begin{aligned}
 & f \text{ ist bei } x_0 \text{ diff'bar} \\
 \iff & f \text{ besitzt bei } x_0 \text{ Tangente} \qquad \implies f \text{ ist bei } x_0 \text{ stetig} \\
 \iff & \exists f'(x_0) \\
 \iff & f \text{ besitzt in } [a, b] \text{ sich stetig ändernde Tangente} \\
 \iff & f \in C^1[a, b] \qquad \implies f \in C^0[a, b]
 \end{aligned}$$

Jetzt: $f : \mathbb{R} \subseteq D \rightarrow \mathbb{R}, D \text{ offen}, \vec{x}_0 \in D$

$$\begin{aligned}
 & \Downarrow \\
 & f \text{ ist bei } \vec{x}_0 \text{ total differenzierbar. } \underline{f \text{ besitzt bei } \vec{x}_0 \text{ Tangential(hyper)ebenen}} \\
 & \Downarrow \\
 & f \text{ besitzt in } D \text{ sich stetig ändernde Tangential(hyper)ebene} \\
 & \Downarrow
 \end{aligned}$$

1. f stetig
2. $\exists f_{x_i}$ in D
3. f_{x_i} , stetig in D

$$\begin{aligned}
 & \Downarrow \\
 & f \in C^1(D)
 \end{aligned}$$

Anmerkung: (a) folgt bereits aus (b) und (c)

Achtung: aus f in x_0 partiell differenzierbar folgt nicht f in \vec{x}_0 stetig und es folgt auch nicht, dass f Tangentialebene besitzt. Tangentialebene wird aufgespannt von allen Tangenten von Flächenkurven durch x_0

Satz 9.6.7 Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen (Schwarz)

Für jede C^2 -Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}, D$ offen gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right), \forall i = 1, \dots, n, \forall k = 1, \dots, n$$

Definition 9.6.8 Gradient

Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ partiell diff'bar. Dann heißt der Vektor

$$\text{grad } f(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \right) \in \mathbb{R}^n$$

der Gradient von f im Punkt $\vec{x} \in D$.

Der Gradient ist meist ein Zeilenvektor! (In Büchern unterschiedlich)

Beispiel 1

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= x^2 y^3 + e^{2x+y} + 5x \\
 f_x &= 2xy^3 + 2e^{2x+y} + 5 \\
 f_y &= 3x^2 y^2 + e^{2x+y} + 0 \\
 f_{xy} &= 6xy^2 + 2e^{2x+y} + 0 \mid f_{yx} = 6xy^2 + 2e^{2x+y} + 0 \\
 f_{xx} &= 2y^3 + 4e^{2x+y} + 0
 \end{aligned}$$

Beispiel 2

$$\begin{aligned}
 g(\vec{x}) &= \vec{a}^T \vec{x} + b = \sum_{i=1}^n a_i x_i + b ; \quad \vec{a}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R} \\
 &\text{(Affin-)lineare Funktion } g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\
 \text{grad}(g(\vec{x})) &= \frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \vec{a}^T
 \end{aligned}$$

Beispiel 3

$$\begin{aligned}
 f(\vec{x}) &= |\vec{x}| = \|\vec{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} \\
 \frac{\partial}{\partial x_k} f(\vec{x}) &= 0.5 \cdot (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_k = \frac{x_k}{\|\vec{x}\|_2} \text{ für } \vec{x} \neq 0, k = 1, \dots, n \\
 \text{grad}(f(\vec{x})) &= (x_1, \dots, x_n) \frac{1}{\|\vec{x}\|_2} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_2} \in \mathbb{R}^n \text{ für } \vec{x} \neq 0
 \end{aligned}$$

9.6.2 Totale Ableitung, linear Approximation, Tangentialebene

$z = f(x, y)$ beschreibt im Anschauungsraum eine (i.Allg.) gekrümmte Fläche. Einfachster Fall: Ebene $z = f(x, y) = a_1 x + a_2 y + b$.

Jetzt: Approximation einer Fläche in der Umgebung eines Flächenpunktes durch eine Ebene (Tangentialebene).

Vorgehensweise: Ähnlich wie bei der Approximation einer Funktion durch eine Tangente.

Definition 9.6.9

Eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt am Punkt (x_0, y_0) total differenzierbar (oder linear approximierbar), wenn es zwei Zahlen gibt, $A, B \in \mathbb{R}$ und zwei Funktionen $\epsilon_1(x, y), \epsilon_2(x, y)$ gibt mit

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + \epsilon_1(x, y)(x - x_0) + \epsilon_2(x, y)(y - y_0)$$

für alle Punkte (x, y) nahe bei einem Punkt (x_0, y_0) und $\epsilon_1(x, y) \rightarrow 0$ für $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$

$\varepsilon_2(x, y) \rightarrow 0$ für $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$

Für eine total differenzierbare Funktion gilt in der Nähe vom Entwicklungspunkt (x_0, y_0)

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0)$$

Satz 9.6.10

Sei $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ in (x_0, y_0) total differenzierbar, dann folgt

1. f ist in (x_0, y_0) stetig
2. $\exists f_x(x_0, y_0), \exists f_y(x_0, y_0)$
3. in 9.1 gilt: $A = f_x(x_0, y_0)$ $B = f_y(x_0, y_0)$
4. Der Graph der Funktion f lässt sich in der Nähe von (x_0, y_0) annähern durch die Tangentialebene $z = f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$
 $= f(x_0, y_0) + \text{grad}(f(x_0, y_0)) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$

Definition der totalen Diff'barkeit anschaulich, aber schlecht nachzuprüfen, deshalb:

Satz 9.6.11

Sei $f : \mathbb{R}^3 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung von $(x_0, y_0) \in D$ partiell differenzierbar nach x und y und die Funktionen $f(x, y)$ und $f_y(x, y)$ sind in (x_0, y_0) stetig.

Dann ist f bei (x_0, y_0) total differenzierbar.

Anmerkung: Die im Satz erwähnte Umgebung kann in 2 Dimensionen ein Kreism in 3 Dimensionen eine Kugel oder ein Würfle sein.

Sei diese Voraussetzung für alle Punkte $(x_0, y_0) \in D$ erfüllt,

$$\left. \begin{array}{l} \exists f_x, f_y \text{ in } D \\ f_x \in C^0, f_y \in C^0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} f \text{ total differenzierbar} \\ f \text{ linear differenzierbar} \end{array} \right\} \text{ ein Zeichen für } f \in C^n(D)$$

Bemerkung. Polynome sind C^∞ .

Beispiel 1

Umgebung um $(1, 1)$, berechne die lineare Approximation der C^∞ -Funktion

$$f(x, y) = x^4 + 2x^3y^2 + y$$

Nebenrechnung: $f(1, 1) = 4, f_x(1, 1) = 4x^3 + 6x^2y^2|_{(1,1)} = 10,$

$$f_y(1, 1) = 4x^3y + 1|_{(1,1)} = 5$$

deshalb gilt:

Tangentialebene $z = 4 + 10(x - 1) + 5(y - 1)$

zur Fläche $z = f(x, y) = x^4 + 2x^3y^2 + y$

im Flächenpunkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (1, 1, 4)$

Definition 9.6.12

Unter der Richtungsableitung von $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ in Richtung $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\vec{v}\| = 1$ versteht man

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{v})}{h}$$

Satz 9.6.13

Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion in D

Sei \vec{v} ein Vektor mit Länge 1 ($\|\vec{v}\| = 1$)

Dann gilt:

Beispiel c)

$$f(x) = \sin x \approx f(0) + f'(0)(x - 0) = 0 + x = x \quad \text{für } x \approx 0$$

Also $\sin x \approx x \quad \text{für } x \approx 0$.

2-dim Beispiele

$$f(x, y) = x^y = e^{y \ln x}$$

Nebenrechnung

$$f_x = e^{y \ln x} \frac{y}{x} = x^y \frac{y}{x}$$

$$f_y = e^{y \ln x} \ln x = x^y \ln x$$

Für $x \approx (1, 3)$

$$f(x, y) \approx f(1, 3) + f_x(1, 3)(x - 1) + f_y(1, 3)(y - 3) = 1 + 3(x - 1) + 0 * (y - 3) = 3x - 2$$

$$f(1.02, 3.01) = 1.02^{3.01} \approx 1.06 \quad (\text{genauer Wert } 1.061416 \dots)$$

Fehlerrechnung

Bezeichnungen:

$\vec{x}_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ mit Messfehlern behaftete Messwerte

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ exakte Werte (unbekannt)

$\Delta \vec{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ Messfehler (Schätzung)

Frage: Wie groß ist eine von \vec{x} abhängige Größe $f(\vec{x})$ durch die Messfehler behaftet?

lineare Approximation:

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + \text{grad} f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad \text{für } |\vec{x} - \vec{x}_0| \text{ klein.}$$

Dreiecksungleichung:

$$|\Delta f(\vec{x})| = |f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| \lesssim \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_k} f(\vec{x}_0) \right| \cdot |\Delta x_k|$$

Dieser Fehler ist in der Physik oft zu pessimistisch. Bei normalverteiltem Fehler Δx_k kann eine Formel für den mittleren Fehler angegeben werden.

Fehlerfortpflanzung von Gauß

(vgl. Gerthsen, Physik, Springer, 17. Auflage, 1993, Seite 7-8)

$$|\Delta f(\vec{x})| \approx \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x_k}\right)^2 \sigma_k^2}$$

σ_k : Standardabweichung/Streuung $\approx \Delta x_k$

Anwendung - Newtonverfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

Ge-sucht Lösung (x, y) von $0 = f(x, y)$ und $0 = g(x, y)$ mit $f, g \in \mathbb{C}^1$

Mit dem Startwert (x_0, y_0) ersetzt man die beiden Gleichungen durch

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \underbrace{(x - x_0)}_{\Delta x} + f_y(x_0, y_0) \underbrace{(y - y_0)}_{\Delta y} \stackrel{!}{=} 0$$

$$g(x, y) \approx g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0) \underbrace{(x - x_0)}_{\Delta x} + g_y(x_0, y_0) \underbrace{(y - y_0)}_{\Delta y} \stackrel{!}{=} 0$$

Hoffnung:

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} f(x^*, y^*) = 0 \\ g(x^*, y^*) = 0 \end{cases}$$

Dabei ist (x_i, y_i) Lösung des LGS mit Startwert (x_{i-1}, y_{i-1}) . In der Regel quadratische Konvergenz in Umgebung der Lösung

$$\left\| \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\| \leq K \left\| \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \right\|^2$$

Vergleiche Newtonverfahren in 1-dim: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Beispiel

(Schwarz, Numerische Mathematik, S. 215)

$$0 = f(x, y) = x^2 + y^2 + 0.6y + 0.16$$

$$0 = g(x, y) = x^2 - y^2 + x - 1.6y - 0.14$$

Im Newton-Verfahren benötigte Ableitungen

$$f_x = 2x, \quad f_y = 2y + 0.6, \quad g_x = 2x + 1, \quad g_y = -2y - 1.6$$

Startnäherung: $(x_0, y_0) = (0.6, 0.25)$

$$\text{das erste LGS} \quad 1.2\Delta x_0 + 1.1\Delta y_0 + 0.4125 = 0$$

$$2.2\Delta x_0 - 2.1\Delta y_0 + 0.3575 = 0$$

$$\text{mit Lösung} \quad (\Delta x, \Delta y) \approx (-0.254960, -0.096862)$$

$$(x_1, y_1) \approx (0.345040, 0.153138)$$

Nach 5 Iterationen erhält man

$$(x_5, y_5) \approx (0.2718845063, 0.1196433776)$$

mit einem absoluten Fehler von $2.4 \cdot 10^{-9}$